Vesmírná odysea

Řešení

Úloha 1

Hledané šestimístné číslo označme a. Po jeho vynásobení číslem 5, bude mít nové číslo na místě jednotek číslici 5. Proto má ve svém zápisu číslo a také číslici 5.

Protože po vynásobení čísla a číslem 6 dostaneme opět šestimístné číslo, musí mít číslo a první číslici 1 a druhou číslici nejvýše 6.

Víme již, že číslo a obsahuje liché číslice 1 a 5, z toho 1 je na prvním místě. Třetí lichá číslice je na místě desítek. Proto číslo a končí některým z dvojčíslí 35, 53, 57, 59, 75, 95. Dvojčíslí 35 nevyhovuje, neboť $35 \cdot 2$ končí na dvojčíslí 70, čímž by nové číslo obsahovalo již čtyři liché číslice 1, 3, 5, 7. Dvojčíslí 53 také nevyhovuje, neboť $53 \cdot 3$ končí na dvojčíslí 59, čímž by přibyla číslice 9. Stejně tak nevyhovuje dvojčíslí 59, neboť $59 \cdot 3$ končí na dvojčíslí 77, a nevyhovuje dvojčíslí 75, neboť $75 \cdot 4$ končí na dvojčíslí 00, a nevyhovuje ani dvojčíslí 95, neboť $95 \cdot 5$ končí na dvojčíslí 75, čímž by přibyla číslice 7.

Tedy číslo a musí končit na dvojčíslí 57. Jelikož $57 \cdot 2$ končí na dvojčíslí 14, obsahuje číslo a také číslici 4, a $57 \cdot 4$ končí na dvojčíslí 28, obsahuje číslo a také číslici 8, a $57 \cdot 6$ končí na dvojčíslí 42, obsahuje číslo a také číslici 2.

Číslo a obsahuje tedy číslice 1, 5, 7, 4, 8, 2, jejichž součet je skutečně dělitelný třemi.

Protože číslo a má druhou číslici nejvýše 6, připadají v úvahu pouze šestimístná čísla 124 857, 128 457, 142 857, 148 257. Vynásobíme-li každé toto číslo čísly 2 až 6, zjistíme, že vyhovuje jedině a = 142 857.

Úloha 2

Na pokrytí lodě je třeba 22 čtverců. A čtverců splňujících podmínky úlohy je 23 (obr. 1), takže loď pokrýt lze. Na obrázku číslice 1, 2 a 3 značí červenou, modrou a žlutou barvu.

1	2	1
2	1	2
1	3	1

1	3	1
3	1	3
1	2	1

1	2	1
3	1	3
1	2	1

1	2	1
3	1	2
1	3	1

1	2	1
2	1	3
1	3	2

1	3	1
3	1	2
1	2	3

1	2	1
3	1	3
1	3	2

1	3	1
2	1	2
1	2	3

1	3	1
2	1	3
1	3	2

1	2	1
3	1	2
1	2	3

1	3	1
3	1	3
1	3	2

1	2	1
2	1	2
1	2	3

2	3	1
3	1	3
1	3	2

3	2	1
2	1	2
1	2	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

1	3	2
2	1	3
1	3	2

1	2	3
3	1	2
1	2	3

1	3	2
3	1	3
1	3	2

1	2	3
2	1	2
1	2	3

3	2	3
2	1	2
1	2	3

2	3	2
3	1	3
1	3	2

2	3	2
3	1	3
2	3	2

3	2	3
2	1	2
3	2	3

Obr. 1

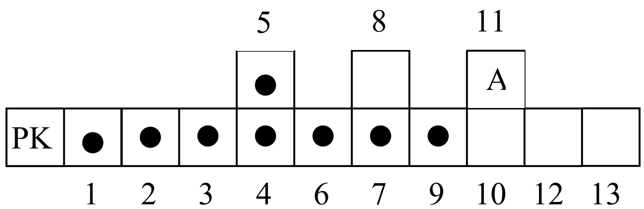
Úloha 3

První a třetí věta si odporují, takže právě jedna z nich je pravdivá. Protože může být jen nejvýše jedna ze tří vět pravdivá, je druhá věta nepravdivá. Tudíž připojovací systém je v levém velkém čtverci.

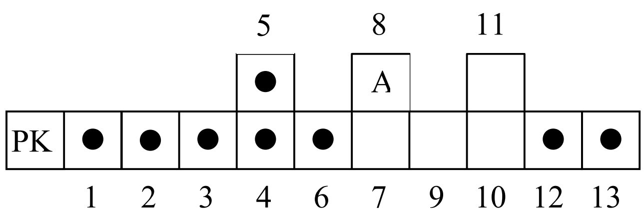
Úloha 4

Na obr. 2a-2d je postupně znázorněna Andyho cesta do pilotní kabiny. Do postavení na obr. 2a se dá dostat nejméně na 16 tahů, odtud do postavení na obr. 2b nejméně na 10 tahů, odtud do postavení na obr. 2c nejméně na 16 tahů a nakonec do postavení na obr. 2d nejméně na 17 tahů. Dohromady to je nejméně 59 tahů.

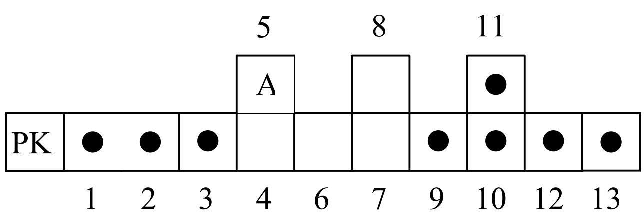
Andy se sice umí dostat na políčko 11 na 12 tahů, ale odtud na políčko 8 (obr. 2b) by potřeboval 16 tahů. Jestliže by potom pokračoval podle obr. 2c, 2d, celkový počet tahů by byl větší. Jestliže by Andyho cesta vedla rovnou na políčko 8, aniž by šel na políčko 11, musel by některý člověk vstoupit do pilotní kabiny, což není přípustné. I tak by Andyho cesta byla dlouhá 67 tahů.



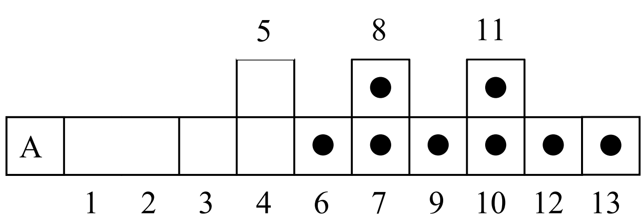
Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c



Obr. 2d

Úloha 5

Nejprve zjistíme, na která políčka se nelze dostat z již označených políček. Proto by každé toto políčko mohlo být stlačeno jako první. Jsou to políčka *a*5 (*a*1, *a*3, *e*5, *f*5), *b*3 (*a*3, *b*2), *d*2 (*b*2), *e*2 (*b*2, *e*5), *e*4 (*e*5), *e*5 (*f*5). V závorce jsou uvedena políčka, z nichž by bylo možné se na příslušná políčka dostat.

Odsud je vidět, že z políčka $a1$ je možné se dostat jen na políčko $a5$, proto do políčka $a1$ musíme zapsat 4D. Pak z políčka $a3$ se dostaneme jen na políčko $b3$, takže do políčka $a3$ zapíšeme 1P. A z políčka $f5$ se dostaneme jen na políčko $e5$, proto do políčka $f5$ zapíšeme 1L.

Za políčkem $e5$ mohou následovat políčka $e2$ nebo $e4$. V prvním případě by šlo o mačkání políček v pořadí $e5$, $e2$, $e3$, $a3$, $b3$, $b5$, $b1$, $e1$, $a1$, $a5$, $f5$, $e5$, což vede k zacyklení. Proto do políčka $e5$ zapíšeme 1H.

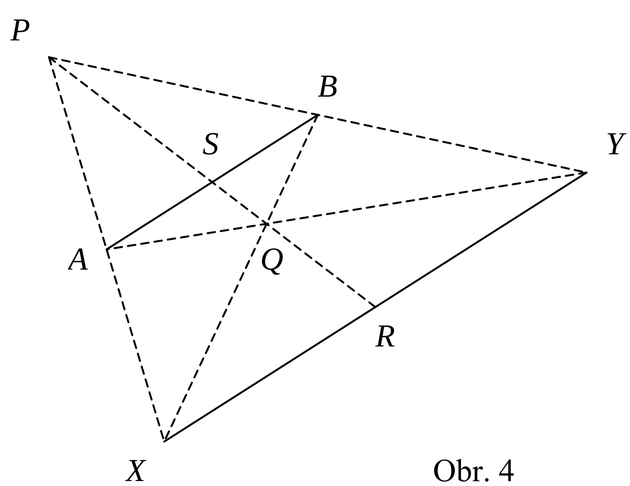
Za políčkem $b2$ mohou následovat políčka $e2$ nebo $d2$. V prvním případě by šlo o mačkání políček v pořadí $b2$, $e2$, $e3$, $a3$, $b3$, $b5$, $b1$, $e1$, $a1$, $a5$, $f5$, $e5$, $e4$, $a4$, $b4$, $d4$, $d3$, $c3$, $f3$, $f4$, $f2$, $c2$, $a2$, $b2$, což vede k zacyklení. Proto do políčka $b2$ zapíšeme 2P.

Ze všech těchto úvah vyplývá, že první má být stlačeno políčko $e2$, o čemž se můžeme přesvědčit projitím celé tabulky na obr. 3.

Kapitán měl dostat instrukce $a1$ (4D), $a3$ (1P), $b2$ (2P) a první důstojník měl dostat instrukce $e5$ (1H), $f5$ (1L).

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	4D	3P	3D	2P	4L	3L
2	1P	2P	2L	3D	1D	3L
3	1P	2D	3P	1L	4L	1D
4	1P	2P	1D	1H	4L	2H
5	5P	4H	K	4H	1H	1L

Obr. 3



Obr. 4

Úloha 6

Na rovnoběžné přímce s přímkou AB zvolíme dva různé body X, Y tak, aby např. délka úsečky XY byla větší než délka úsečky AB (obr. 4). Sestrojíme přímky AX a BY a jejich průsečík označíme P. Stejně tak sestrojíme úsečky AY a BX a jejich průsečík označíme Q. Dále označme S střed úsečky AB a R střed úsečky XY. Dokážeme, že přímka SR prochází body P a Q, neboli že přímka PQ prochází body S a R.

Přímka SR rozděluje obsah lichoběžníku $XYBA$ na polovinu. Trojúhelníky XYB a XYA mají stejný obsah, neboť mají společnou stranu XY a stejnou výšku na tuto stranu. Proto mají i trojúhelníky XQA a YQB stejný obsah. Trojúhelníky XRQ a YRQ mají stejný obsah a trojúhelníky ASQ a BSQ mají stejný obsah. Z toho všeho plyne, že bod Q leží na přímce RS.

Analogicky se dokáže, že bod P leží na přímce RS.

Tedy střed úsečky AB se najde jako průsečík přímek AB a PQ.