Vesmírná odysea

Řešení 2. série

Úloha 7

Označme v výšku trojúhelníku ETK na stranu ET a v' výšku trojúhelníku OWX na stranu WO. Má platit

$$|ET| \cdot v = |WO| \cdot v',$$

neboli

$$v' = \frac{|ET|}{|WO|} \cdot v.$$

Výšku v' sestrojíme pomocí redukčního úhlu. Nyní máme dvě možnosti sestrojení trojúhelníku OWX.

Jednak můžeme považovat stranu WO za základnu rovnoramenného trojúhelníku a v' za výšku na tuto základnu. Zde je konstrukce bodu X jasná.

A jednak můžeme považovat stranu WO za rameno rovnoramenného trojúhelníku a v' za výšku na toto rameno. V tomto případě sestrojíme rovnoběžku se stranou WO ve vzdálenosti v' a kružnici se středem W a poloměrem $|WO|$. Jejich průsečík je bod X.

Úloha 8

Existuje 12 různých čtyřstěnů: jeden 0s6z, jeden 6s0z, jeden 1s5z, jeden 5s1z, dva 2s4z, dva 4s2z, čtyři 3s3z. Znak „s“ znamená stříbrnou hranu, znak „z“ znamená zlatou hranu.

Úloha 9

Není $W = 1$, proto je $T = 1$ nebo $T = 2$ nebo $T = 3$ nebo $T = 4$, aby součin bylo opět čtyřmístné číslo.

Není též $W = 5$, protože jinak by muselo být $T = 0$ nebo $T = 5$, což není možné.

Bude-li T liché, bude i F i W liché.

Kdyby bylo $T = 4$, muselo by být jedině $W = 2$ a k tomu $F = 8$ nebo $F = 9$. Pak ale součin $F \cdot W$ končí na číslici 6 nebo 8, což není možné.

Kdyby bylo $T = 1$, muselo by být buď $F = 3$ a $W = 7$, nebo $F = 7$ a $W = 3$. V prvním případě je $TJAF \cdot W > 7\,000$, což není možné. Ve druhém případě je $TJAF \cdot W < 7\,000$, což opět není možné.

Kdyby bylo $T = 3$, muselo by být jedině $W = 3$, což není možné.

Je-li $T = 2$, musí být $W = 3$ nebo $W = 4$. V prvním případě musí být $F = 4$ a k tomu je $TJAF \cdot W > 6\,000$, což si odporuje. Ve druhém případě musí být $F = 3$ nebo $F = 8$. V případě $F = 3$ je $TJAF \cdot W > 6\,000$, což není možné.

Proto musí být jedině $T = 2$, $W = 4$ a $F = 8$.

Z výrazu $FAJT : TW$ vyplývá, že číslo $FAJT = 8AJ2$ musí být dělitelné 24, tj. dělitelné osmi (tedy i čtyřmi) a třemi. Z dělitelnosti čtyřmi plyne, že J musí být lichá číslice, a z dělitelnosti třemi plyne, že $A + J = 2$ nebo $A + J = 5$ nebo $A + J = 8$ nebo $A + J = 11$ nebo $A + J = 14$ nebo $A + J = 17$. Vyzkoušíme-li všechny možné případy, tak při požadavku různosti všech číslic a dělitelnosti čísla $8AJ2$ osmi dostaneme $A = 7$ a $J = 1$, nebo $A = 3$ a $J = 5$, nebo $A = 9$ a $J = 5$, nebo $A = 5$ a $J = 9$.

Provedeme-li pro tyto čtyři možnosti zkoušku rovnosti $TJAF \cdot W = FAJT$, zjistíme, že vyhovuje jediná pětice číslic: $F = 8$, $A = 7$, $J = 1$, $T = 2$, $W = 4$.

Fajtův věk pak je 8712 : 24 + 178 = 541 let.

Úloha 10

Počet Johnsonů, Gregoryů, Russelů a Terryů ve Shromáždění označme postupně J, G, R, T. Podle podmínek úlohy platí:

$$J + G + R + T = 45$$

$$G - 2 = J + 2 = \frac{R}{2} = 2T$$

Z posledních tří rovností dostaneme $G = 2T + 2$, $J = 2T - 2$, $R = 4T$. Po dosazení těchto hodnot do první rovnosti dostaneme

$$2T - 2 + 2T + 2 + 4T + T = 45,$$

$$T = 5.$$

Ve shromáždění mají Johnsonovi 8 členů, Gregoryovi 12 členů, Russelovi 20 členů a Terryovi 5 členů.

Úloha 11

Následující tabulka ukazuje, jak je možné přelévat 7o hnacínu mezi jednotlivými nádržemi. Stačí k tomu šest přelití.

přelévání	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
nádrž o objemu 7o	7o	3o	3o	6o	6o	2o	2o
nádrž o objemu 4o	0o	4o	1o	1o	0o	4o	2o
nádrž o objemu 3o	0o	0o	3o	0o	1o	1o	3o

Při rozlévání 6o hnacínu má být na konci v každé nádrži 2o hnacínu. K tomuto stavu se ale nelze dostat ze žádného předchozího rozdělení hnacínu v jednotlivých nádržích.

Úloha 12

Ze zadání hodnot v úloze plyne, že nejrychlejší byla loď TWA. Jednotlivé lodi měly tyto rychlosti pohybu (tj. dráhy uražené za jednu hodinu) a doby letu: TWA – rychlost v, doba letu t, TWB – rychlost $\frac{5}{6}v$, doba letu $t + \frac{12}{60}$, TWC – rychlost $v - 18\lambda$, doba pohybu $t + \frac{15}{60}$.

Všechny lodě proletěly stejnou dráhu, takže platí tyto rovnosti:

$$vt = \frac{5}{6}v\left(t + \frac{12}{60}\right)$$

$$vt = (v - 18\lambda)\left(t + \frac{15}{60}\right)$$

Z první rovnice získáme t = 1 hod a po dosazení této hodnoty do druhé rovnice vyjde $v = 90\lambda$/hod.

Tedy TWA měla rychlost 90λ/hod, TWB 75λ/hod a TWC 72λ/hod. Vzdálenost úkrytu od lodi byla 90λ.