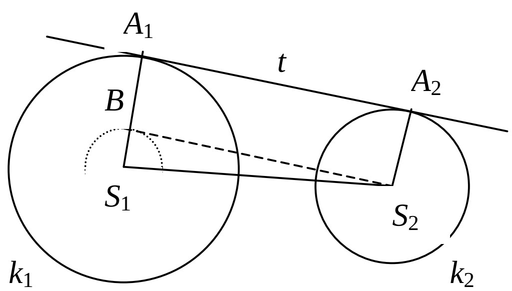
Řešení: 19. ročník, 3. série - Vesmírná odysea

Úloha 13

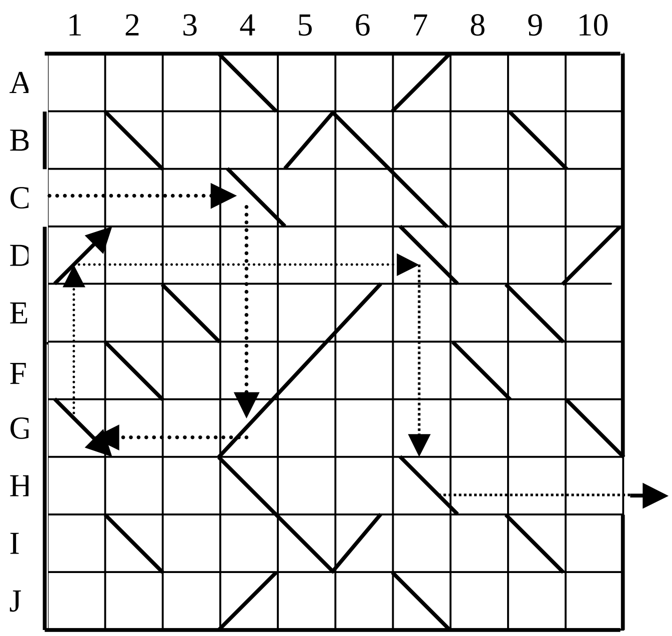
Mějme dva kruhy k_1 (S_1, r_1), k_2 (S_2, r_2), $r_1 > r_2$, které představují planetu a měsíc. Hledáme jejich vnější tečnu t s dotykovými body A_1 a A_2 (obr. 5). Poloměry S_1A_1, S_2A_2 jsou kolmé na tečnu t, proto jsou rovnoběžné. Úsečka S_2B je rovnoběžná s A_1A_2 a platí $|S_1B| = r_1 - r_2$.

Proto sestrojíme kružnici se středem S_1 a poloměrem $r_1 - r_2$ a Thaletovu kružnici nad průměrem S_1S_2. Jejich průsečíkem je bod B. Tečna t se pak sestrojí jako rovnoběžka s přímkou S_2B.



Obr. 5

Úloha 14



Obr. 6

Na obr. 6 je znázorněno, jak je možné dostat kouli ven z bludiště pomocí otočení pěti stěn C4, G1, D1, D7, H7.

Kdybychom neotočili stěnu C4, museli bychom místo toho otočit tři stěny A4, A7, C7 a napojili bychom se na výše uvedenou cestu.

Kdybychom otočili stěny C4 i G4, museli bychom otočit ještě další tři stěny G10, D10, H7, což je druhé řešení úlohy.

Kdybychom neotočili stěny G1 nebo D1, skončila by koule na hranici bludiště.

Kdybychom neotočili stěny D7 nebo H7, bylo by potřebné otočení stěn také větší.

Úloha 15

Použijeme zde kriterium dělitelnosti přirozených čísel devíti, tj. přirozené číslo je dělitelné devíti, právě když je dělitelný devíti součet jeho číslic.

Nejprve vypočteme součet číslic čísel 10, 11, 12, ..., 78, 79, 80, z nichž se zadané číslo skládá. Součty těchto čísel postupně jsou 1, 2, 3, ..., 9, 10, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 3, 4, ..., 15, 16, 8. Tyto součty je nyní třeba sečíst a bude-li tento součet dělitelný devíti, bude i zadané číslo dělitelné devíti. Dělitelnost devíti se ale nezmění, pokud od čísel 1, 2, 3, ..., 9, 10, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 3, 4, ..., 15, 16, 8, která jsou větší než 9, odečteme číslo 9. Takže stačí sčítat čísla 1, 2, 3, ..., 9, 1, 2, 3, ..., 9, 1, 2, 3, 4, ..., 6, 7, 8. Zde se vyskytuje několikat skupina 1, 2, 3, ..., 9, jejíž součet dělitelný devíti je, takže stačí už jenom sečíst skupinu 1, 2, 3, ..., 8. Její součet je ale také dělitelný devíti, takže i číslo, které zadal počítač, je dělitelné devíti.

Úloha 16

Přírodovědec se jmenoval Robert Terry a měl 192 let, jazykovědec se jmenoval Jerry Russel a měl 237 let, matematik se jmenoval Gordon Gregory a měl 249 let a psycholog se jmenoval Trevor Johnson a měl 216 let.

Úloha 17

Jedna z možných otázek je: „Je „mat“ pravdivá odpověď na otázku, zda jsi rozumný?“

Jestliže „mat“ znamená ano nebo ne, rozumný i pomatený mravenec odpoví „mat“ a rozumný i pomatený encelofág odpoví „tam“.

Úloha 18

Zkoumejme nejprve ředění séra v první nádobě. Po prvním ředení je v nádobě $V-x$ séra, což je $\frac{V-x}{V}$ zlomek objemu celé nádoby. Při druhém ředění se odebere z nádoby $x\cdot\frac{V-x}{V}$ séra, takže objem séra, které v nádobě zůstane, je

$$(V-x)-x\cdot\frac{V-x}{V}=\frac{(V-x)^2}{V}\,.$$

Takže zlomek objemu séra v celé nádobě je

$$\frac{\frac{(V-x)^2}{V}}{V}=\frac{(V-x)^2}{V^2}\,.$$

Analogicky ve druhé nádobě je po dvou ředěních zlomek objemu séra v celé nádobě roven

$$\frac{(V-2x)^2}{V^2}\,.$$

V receptu se říká, že

$$\frac{\frac{(V-x)^2}{V^2}}{\frac{(V-2x)^2}{V^2}}=\frac{25}{16},\quad \frac{(V-x)^2}{(V-2x)^2}=\frac{25}{16},\quad \frac{V-x}{V-2x}=\frac{5}{4},$$

$$4(V-x)=5(V-2x),$$

$$x=\frac{V}{6}\,.$$

Tedy *x* miliobejů tvoří jednu šestinu objemu *V* celé nádoby, tj. *x* obejů tvoři tisíc šestin objemu *V*.