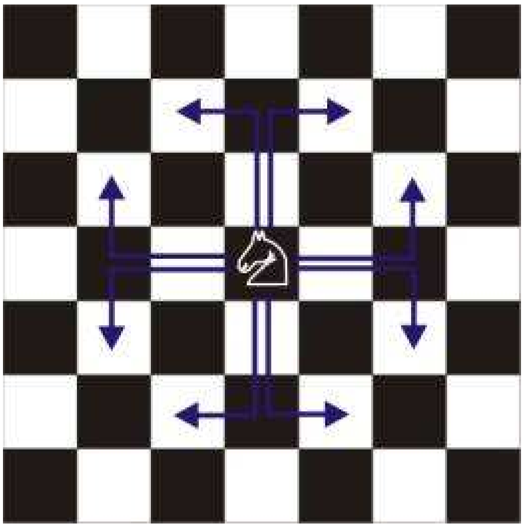
Řešení: 20. ročník, 1. série

Úloha 1

K řešením úlohy nám pomůže pohled na šachovnici. Z obrázku je patrné, že se šachovnice skládá z lichého počtu polí (49). Dále si musíme uvědomit, že šachový kůň svým pohybem střídá bílé a černé pole. Začne-li pohyb na bílém poli, musí jeho „skok“ směřovat na černé pole, dále na bílé, černé atd...

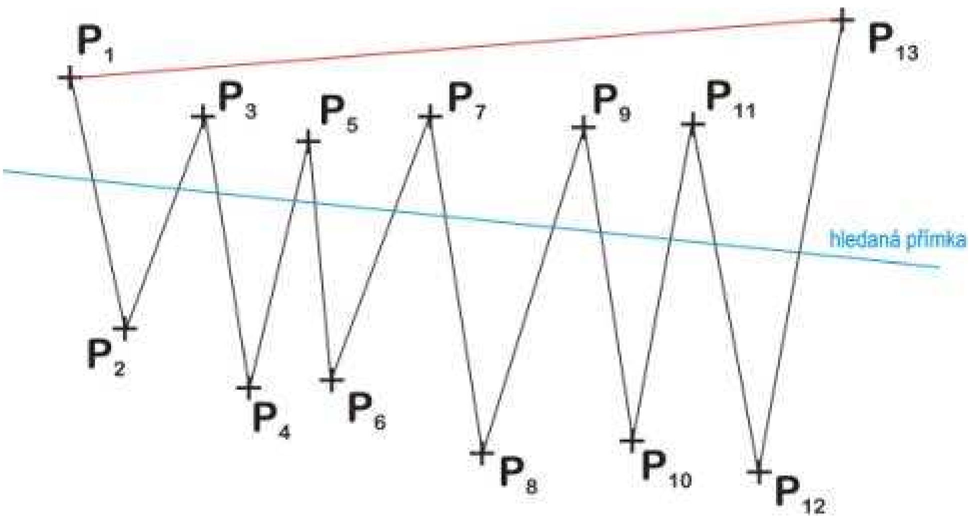
Po lichém počtu skoků se tedy kůň ocitne na poli opačné barvy, než na jakém začínal. Proto není možné uskutečnit jezdcem 49 tahů tak, aby se posledním tahem vrátil na pole, kde pohyb začal.



Úloha 2

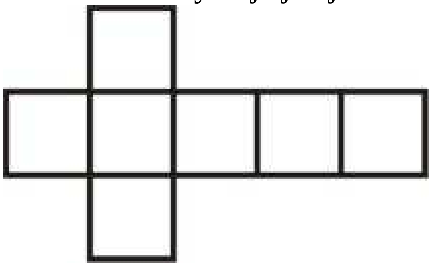
K řešení si pomůžeme úvahou, jak by dané body v rovině musely být položeny, pokud by daná přímka existovala. Představíme-li si, že hledaná přímka dělí rovinu na dvě poloroviny, pak první bod P_1 leží například (tzv. „bez újmy na obecnosti“) v první polorovině. Aby bylo možné hledanou přímkou protnout úsečku P_1P_2, musí pod P_2 ležet v druhé polorovině. Podobně bod P_3 musí ležet v první polorovině. Opakováním tohoto pravidla se dostáváme k bodu P_{13}, který musí ležet v první polorovině, a tudíž hledaná přímka nemůže protnout úsečku P_1P_{13}.

Proto není možné sestrojit přímku, která by protínala každou z daných úseček ve vnitřním bodě.

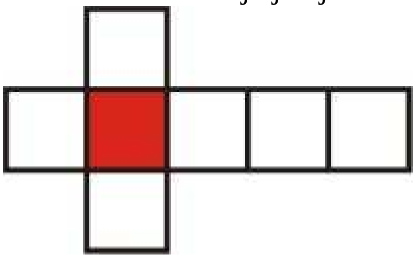


Úloha 3
Předpokládejme, že máme bílou krychli a barvíme ji na červeno. Krychle budeme dělit podle toho, kolik stěn obarvíme.

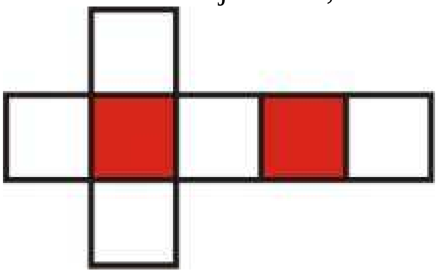
0 stěn červených – krychle se všemi stěnami bílými je jen jedna

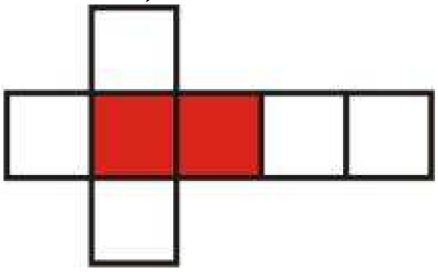


1 stěna červená – krychle s jednou červenou stěnou je jen jedna

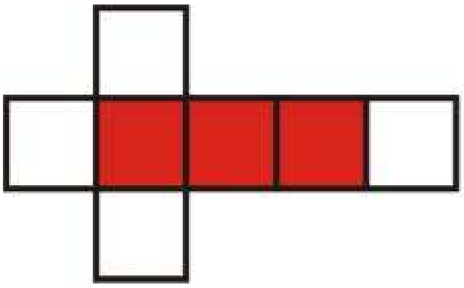


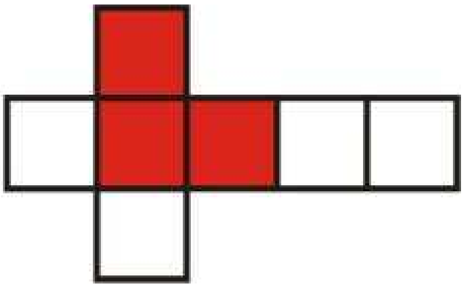
2 stěny červené – možnosti jsou dvě, barevné stěny spolu sousedí, nebo nesousedí





3 stěny červené – možnosti jsou opět dvě, buď jsou obarveny na červeno všechny stěny u jednoho vrcholu, nebo ne.





4 stěny červené – zbývající dvě stěny jsou bílé; pokud bychom u takto obarvených krychlí prohodili barvy stěn (tj. bílou za červenou a červenou za bílou), dostali bychom stejné krychle jako v případě dvou stěn červených – tedy možností je také stejně, jsou dvě

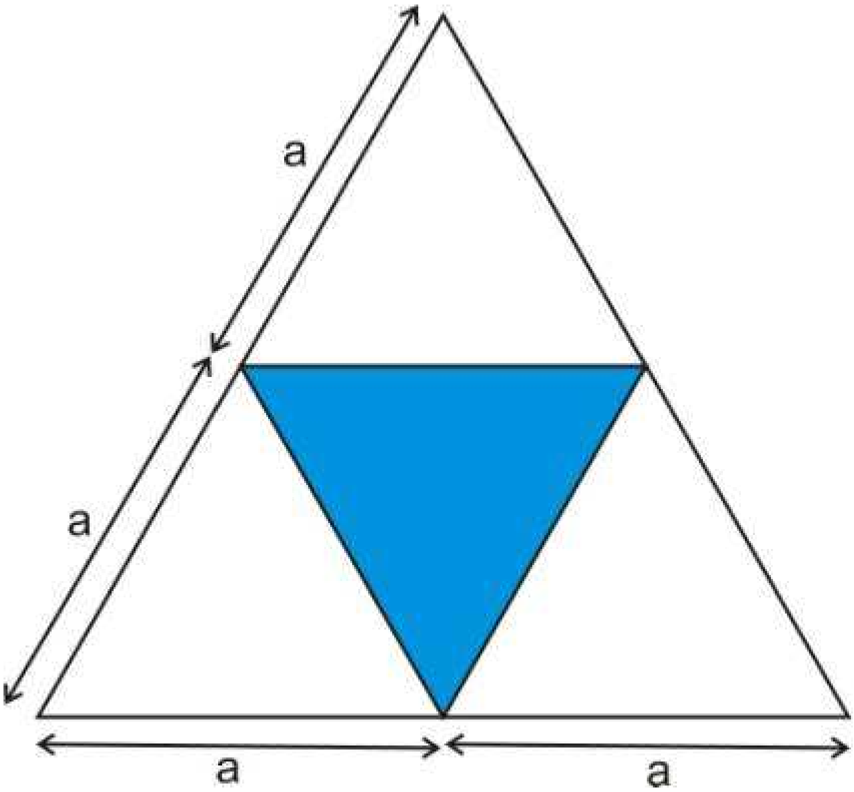
5 stěn červených – zbývající stěna je bílé; pokud bychom u takto obarvené krychle prohodili barvy stěn (tj. bílou za červenou a červenou za bílou), dostali bychom stejnou krychli jako v případě jedné stěny červené – tedy možností je také stejně, pouze jedna

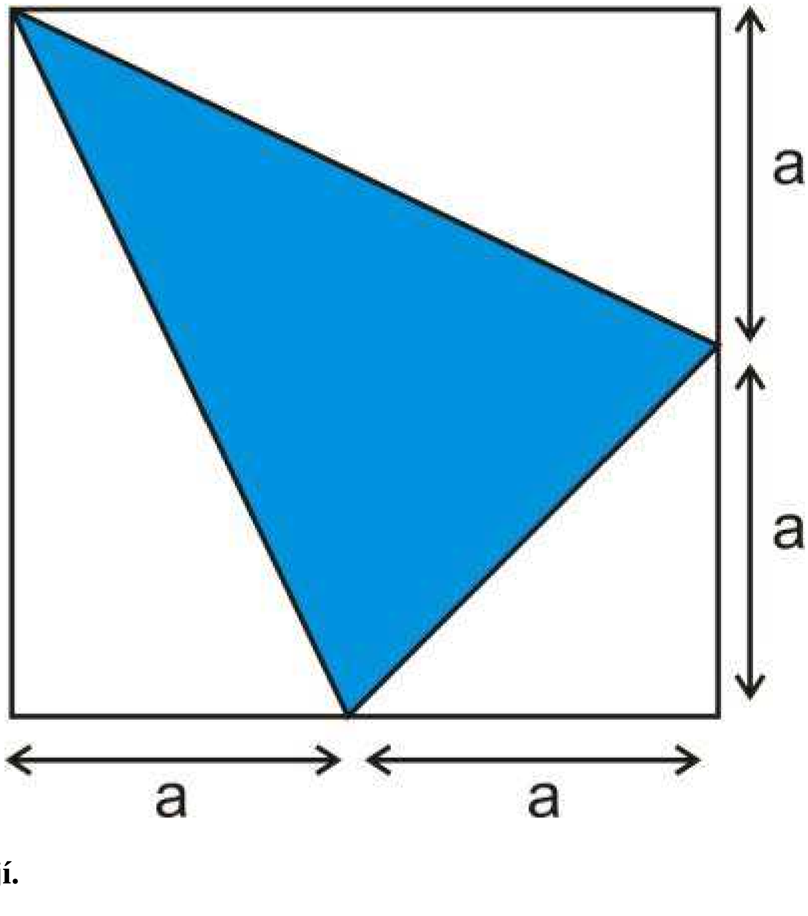
6 stěn červených – pokud bychom u takto obarvené krychle prohodili barvy stěn (tj. bílou za červenou a červenou za bílou), dostali bychom stejnou krychli jako v případě žádné stěny červené – tedy možností je také stejně, pouze jedna

Celkem tedy takto získáme 10 různých krychlí.

Úloha 4

K řešení nám postačí znázornění daných těles na síti.





Obě tělesa existují.

Úloha 5

K řešení úlohy nám pomůže vzorec $x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$. Tím si upravíme rovnici $x^2 - y^2 = a^3$ na tvar $(x-y)\cdot(x+y) = a\cdot a^2$. Rovnice bude mít celočíselné řešení, pokud obě rovnice $(x-y) = a$, $(x+y) = a^2$ budou mít celočíselné řešení. Z první rovnice vyjádříme neznámou $x = a + y$ a dosadíme do druhé rovnice $a + 2\cdot y = a^2$ $2\cdot y = a^2 - a$. Z té vyplývá vztah pro neznámou $y = \frac{a\cdot(a-1)}{2}$.

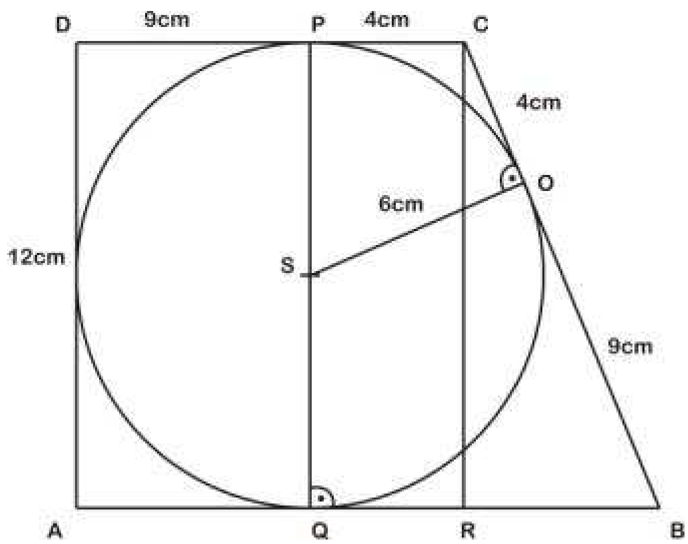
Řešení zakončíme úvahou:

Pokud $a = 1$, pak $x = 1, y = 0$.

Pokud $a \neq 1$, pak $a\cdot(a-1)$ je součin sudého a lichého čísla, tedy sudé číslo. Pak $y = \frac{a\cdot(a-1)}{2}$ je celé číslo a $x = a + y$ je také celé číslo.

Rovnice $x^2 - y^2 = a^3$ má vždy celočíselné řešení.

Úloha 6



Z vlastnosti tečen bodu ke kružnici vyplývá, že vzdálenost |BO| = |BQ|, respektive |CO| = |CP|. Velikost úsečky |BR| vypočteme jako |BQ| – |CP| = 5 cm. Podle Pythagorovy věty vypočteme velikost |CR| = 12 cm . Poloměr kružnice *k* je poloviční, tj. 6 cm. Velikost úsečky |AQ| = 6 cm, respektive |PD| = 6 cm. Z těchto údajů dopočítáme délky úseček |AB| , |AD| a |CD|. Obsah lichoběžníku vypočítáme ze známého vzorce.

Obsah lichoběžníku ABCD je 150 cm^2.