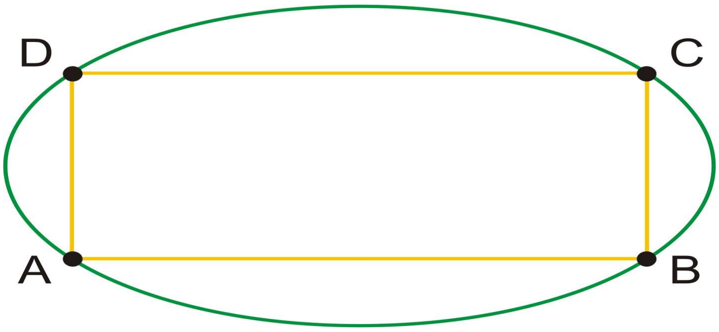
Řešení: 20. ročník, 2. série

1.úloha

Předpokládejme, že hledaná cesta existuje. Pak je možné vyrazit z bodu A do bodu D po žluté cestě (obvodu obdélníka). Abychom splnili všechny podmínky zadání, musíme po příchodu na křižovatku (body D, C, B) zvolit cestu druhé barvy, než po které jsme přišli. Jinak by nedošlo k překřížení cesty. Z bodu D tedy půjdeme po zelené cestě, z bodu C po žluté a z bodu B opět po zelené. Z bodu A bychom měli pokračovat po zelené cestě. Protože jsme z bodu B přišli po zelené cestě, není možné v cestě pokračovat.

Hledaná cesta tedy neexistuje.



2.úloha

Každý pravý zlomek lze převést na součet kmenných zlomků následujícím postupem. Najdeme největší kmenný zlomek, který je menší (nebo roven) než daný pravý zlomek. Rozdíl vyjádříme pravým zlomkem a opět vyhledáme největší kmenný zlomek. Budeme postupovat tak dlouho, dokud nepůjde rozdíl vyjádřit pravým zlomkem, tedy dokud čitatel rozdílu nebude 1. Protože se čitatel rozdílu s každým sčítancem snižuje, je zřejmé, že k hledanému rozkladu dojdeme v konečném počtu kroků. Hledaný rozklad pravého zlomku pak bude tvořit součet kmenných zlomků.

Každý pravý zlomek je možné rozložit na součet kmenných zlomků.

Příklad:

Pro zlomek $\frac{3}{7}$ *najdeme největší kmenný zlomek menší než* $\frac{3}{7}$*, tj.* $\frac{1}{3}$*. Pro rozdíl* $\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{2}{21}$ *tedy pro* $\frac{2}{21}$ *opět najdeme největší kmenný zlomek , tj.* $\frac{1}{11}$*. Protože rozdíl* $\frac{2}{21}-\frac{1}{11}=\frac{1}{231}$ *tvoří kmenný zlomek* $\frac{1}{231}$*, hledaný rozklad zlomku* $\frac{3}{7}$ *tvoří kmenné zlomky.* $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$

Řešení pro zadané zlomky:

$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$ $\frac{7}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{45}$ $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ $\frac{10}{21}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

3.úloha

Pokud si vyjádříme rozdíl

DOUBI – 10xDUB

pak za předpokladu, že "O" značí nulu, můžeme zapsat výsledek jako

DOUBI
<u> DUBO</u>
xy OOI

Po postupném dosazování různých číslic za D získáváme ještě bližší vyjádření rozdílu.

Pro D = 1 DOUBI – 10xDUB = 900I
Pro D = 2 DOUBI – 10xDUB = 1800I
Pro D = 3 DOUBI – 10xDUB = 2700I
Pro D = 4 DOUBI – 10xDUB = 3600I
Pro D = 5 DOUBI – 10xDUB = 4500I
Pro D = 6 DOUBI – 10xDUB = 5400I
Pro D = 7 DOUBI – 10xDUB = 6300I
Pro D = 8 DOUBI – 10xDUB = 7200I
Pro D = 9 DOUBI – 10xDUB = 8100I

Pokud D=1, pak DUB vyjadřuje číslo mezi 123 a 198 . Počet dubů v doubí (bez 10) je tedy číslo mezi 46 a 73 (protože 9008: 123 = 73,2, je 73 největší počet; respektive 9007:198 = 45,5, tedy 46 je nejmenší počet dubů). Z tohoto intervalu budeme postupně stejně jako Honzík dosazovat prvočísla (47, 53, 59, 61, 67, 71). Zjistíme, zda-li je možné najít jejich násobek mezi 9002-9008. Podobnou úvahu provedeme i pro zbylé možnosti volby D.

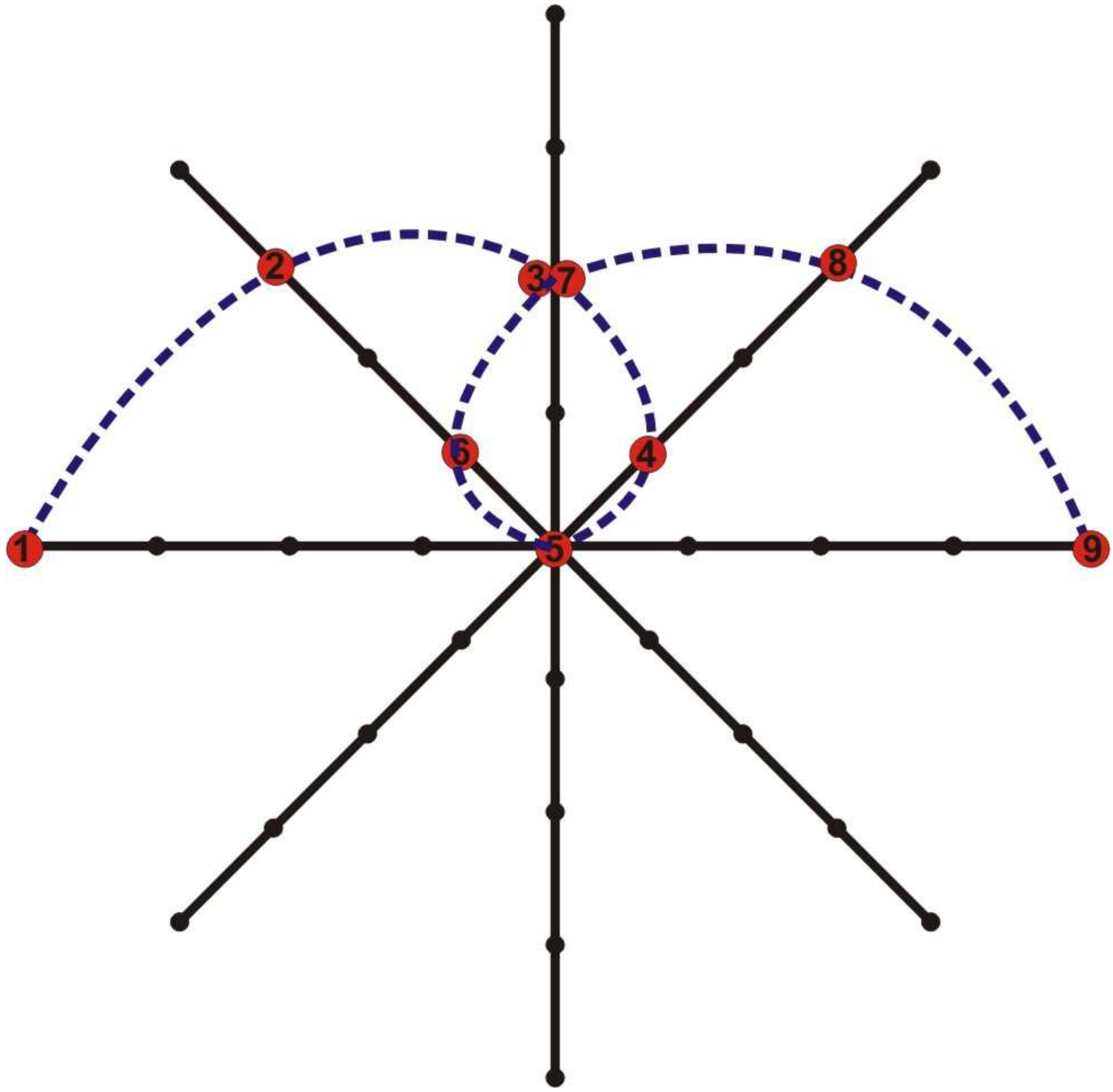
Jediná vyhovující možnost je pro D= 9, O=0, U=7, B=6, I=8.

DOUBI = 90768
DUB = 976
DOUBI – 10xDUB = 90768-9760= 81008

4.úloha

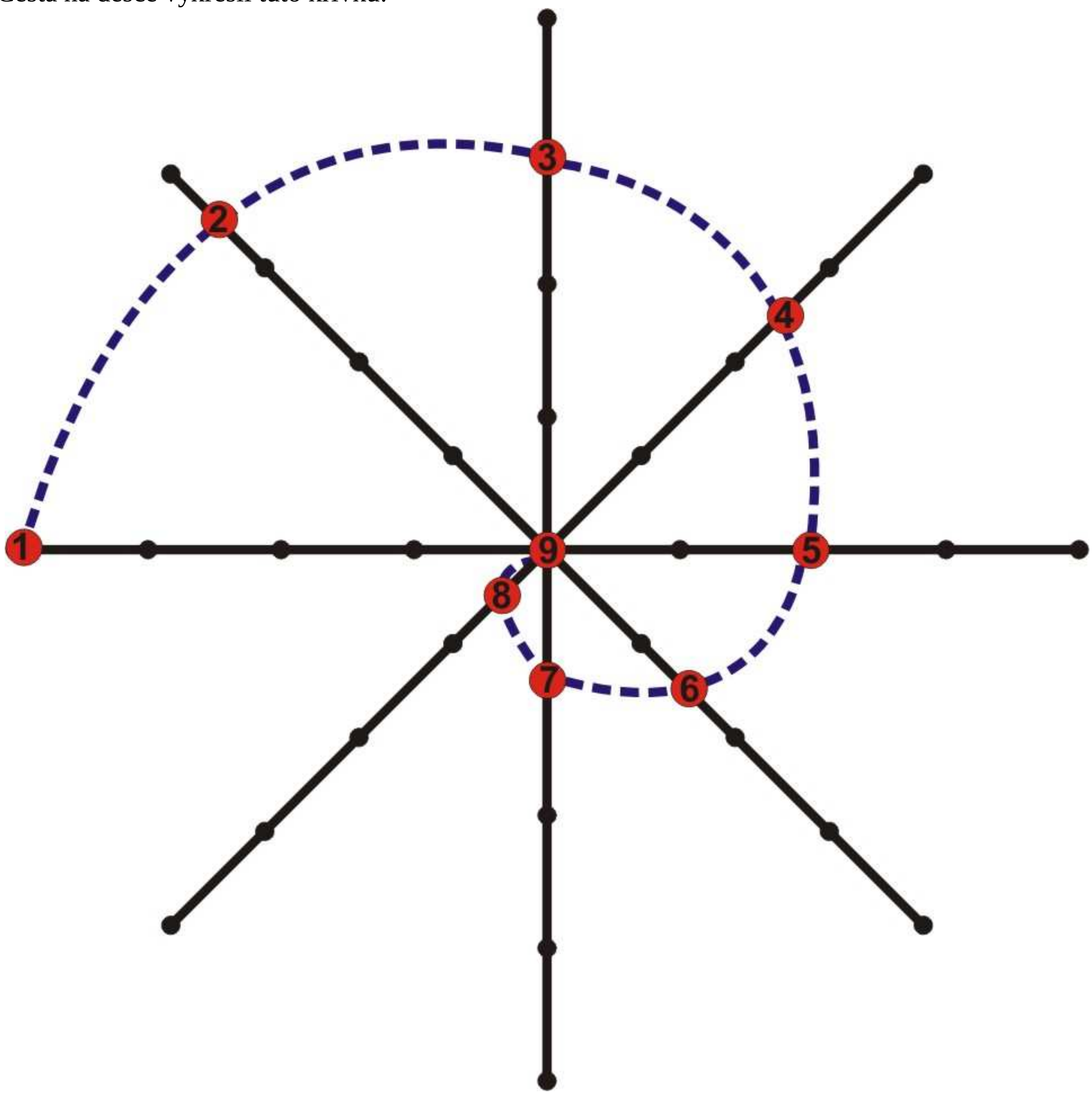
Pokud by se brouk pohyboval po úsečce, vypadala by jeho cesta z bodu A do bodu B takto:

Kolečka s čísly označují jeho polohu v průběhu cesty. Protože se brouk pohybuje po úsečce, která se na desce otáčí, můžeme jeho cestu zaznamenat pomocí otáčení samotné úsečky.



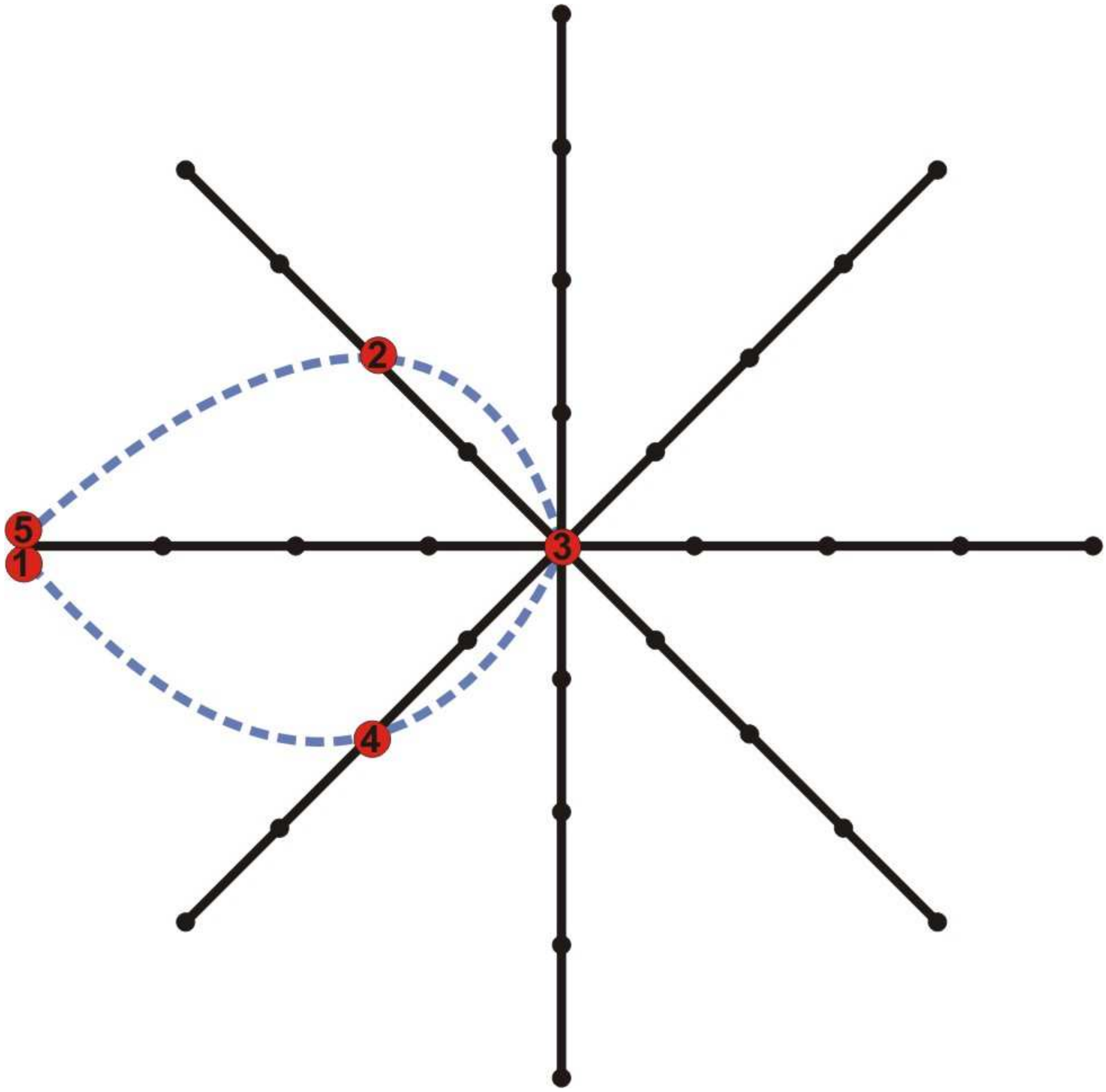
Pokud se bude brouk pohybovat poloviční rychlostí, dojde pouze do středu úsečky, který se nachází ve středu desky.

Cesta na desce vykreslí tuto křivku:



Pokud se bude brouk pohybovat dvojnásobnou rychlostí, dojde na konec úsečky v době, kdy se gramofonová deska otočí pouze do poloviny.

Cesta na desce vykreslí tuto křivku:



5.úloha

Protože má být *n* přirozené číslo, ze zadání vyplývá, že musí být dělitelné 2, 3 a 5. Číslo n tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \,.$$

Pak tedy

$$\frac{n}{2} = 2^{x-1} \cdot 3^y \cdot 5^z \;,\; \frac{n}{3} = 2^x \cdot 3^{y-1} \cdot 5^z \;,\; \frac{n}{5} = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{z-1}.$$

Protože $\frac{n}{2}$ má být 2 mocninou přirozeného čísla, pak z rovnosti $\frac{n}{2} = 2^{x-1} \cdot 3^y \cdot 5^z$ vyplývá, že x-1 je dělitelné 2, *y* je dělitelné 2, *z* je dělitelné 2.

Podobně z rovnosti $\frac{n}{3} = 2^x \cdot 3^{y-1} \cdot 5^z$ vyplývá, že *x* je dělitelné 3, *y*-1 je dělitelné 3, *z* je dělitelné 3.

Z rovnosti $\frac{n}{5} = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{z-1}$ vyplývá, že *x* je dělitelné 5, *y* je dělitelné 5, *z*-1 je dělitelné 5.

Protože *n* má být nejmenší přirozené číslo, $x = 15$, $y = 10$, $z = 6$.

Hledané *n* tedy můžeme zapsat jako $n = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

6.úloha

Počet dělitelů daného čísla *a* můžeme zjistit z jeho prvočíselného rozkladu. Nechť $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdots p_n^{r_n}$, kde p_i jsou prvočísla a r_i kladná přirozená čísla, $i = 1, 2, \ldots , n$.
Každý dělitel čísla *a* se dá zapsat ve tvaru $p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \cdots p_n^{s_n}$, čísla s_i mohou nabývat $r_i + 1$ hodnot, a to 0, 1, 2, ... , r_i.
Počet všech různých dělitelů čísla *a* je tak dán součinem $(r_1+1)\cdot(r_2+1)\cdot(r_3+1)\cdots(r_4+1)$.

Rozklad čísla 2007 na součin prvočísel je $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$. Hledané číslo s 2007 děliteli se bude skládat z 3 nejmenších prvočísel (různých od 1), nejmenší bude v 222. mocnině, obě zbylá v druhé mocnině. Hledané prvočíslo je tedy $2^{222} \cdot 3^2 \cdot 5^2$.