Pikomat 21. ročník – Řešení první série

<u>Úloha 1:</u> Ani jedno z čísel *a*, *b*, *c*, není dělitelné pěti. Tedy každé z nich dává po dělení pěti zbytek 1, 2, 3, nebo 4. Každé z nich si můžu vyjádřit jako $5k$ + zbytek, kde k je přirozené číslo (tedy na část dělitelnou pěti plus zbytek – budu značit z). Druhá mocnina každého z čísel je tedy $(5k + z)^2 = 25k^2 + 10kz + z^2$. Číslo $25k^2 + 10kz$ je dělitelné pěti vždy a nachází se v součtu, proto s nimi dál nemusím počítat, zbytek po dělení pěti je určen členem z^2. Protože z je 1, 2, 3, nebo 4, z^2 je tedy 1, 4, 9, nebo 16. Číslo 9 dá po dělení pěti zbytek 4, 16 dá po dělení pěti zbytek 1. Proto a^2 (stejně tak i b^2 a c^2) mají po dělení pěti zbytek 1 nebo 4. Takže $a^2 + b^2$ dává po dělení pěti zbytek 1+1 = 2, 1+4 = 4+1 = 5 (což odpovídá zbytku 0) nebo 4 + 4 = 8 (což odpovídá zbytku 3).

Mohou nastat pouze tyto možnosti:

zbytek po vydělení $a^2 + b^2$ pěti	zbytek po vydělení c^2 pěti	celkový zbytek
2	1	1
2	4	-2 ~ 3
5 ~ 0	1	4
5 ~ 0	4	1
8 ~ 3	1	2
8 ~ 3	4	4

Celkový zbytek nikdy není 0, celý výraz tedy nikdy být dělitelný pěti nemůže.

<u>Úloha 2:</u>

Součet vnitřních úhlů n-úhelníku je $(n-2)\cdot 180$ stupňů. Na jeden úhel tedy připadá $\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 180 - \frac{360}{n}$ stupňů. Aby to bylo celé číslo, musí být n přirozené číslo, které je dělitelem čísla 360. Tedy n může být 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, nebo 360.

<u>Úloha 3:</u>

Hledaná čísla jsou A = 5, B = 5, C = 7, D = 7, E = 8. (Celá tabulka nebyla pro řešení nezbytná.)

4	2	5	8	9	7	3	6	1
6	3	9	1	2	5	8	7	4
8	7	1	4	6	3	9	2	5
7	6	8	3	5	4	2	1	9
5	1	3	2	7	9	6	4	8
2	9	4	6	1	8	7	5	3
9	5	6	7	3	1	4	8	2
3	8	2	5	4	6	1	9	7
1	4	7	9	8	2	5	3	6

<u>Úloha 4:</u> Zlomek $\frac{96}{35}$ je přibližně roven 2,74, zlomek $\frac{97}{36}$ je přibližně roven 2,69. Nabízí se, že zlomek s celkem malým jmenovatelem mezi nimi bude zlomek $\frac{27}{10}$. Postupně odzkoušíme, zda nějaký zlomek s jmenovatelem menším než 10 neleží také v tomto intervalu. Např. pro devítiny: Hledáme zlomek $\frac{a}{9}$, pro který platí $\frac{97}{36} < \frac{a}{9} < \frac{96}{35}$. Odtud by bylo 2,69 < $\frac{a}{9}$ < 2,7, 24,21 < a < 24,3, přičemž a je celé číslo. Takové a zjevně neexistuje. Postupně stejným způsobem prozkoušíme osminy – opět žádné číslo nevyjde, sedminy – vyjde $\frac{19}{7}$, šestiny, pětiny… Pro žádný jmenovatel menší než 7 už řešení nevyjde, hledaný zlomek je tedy $\frac{19}{7}$.

Úloha 5: (Uvědomte si, že nd hlava ve svých výrocích o ostatních hlavách lže – ona přeci umí jen lhát. V tom hodně z vás chybovalo.) Začněme od první hlavy. Pokud první hlava mluví pravdu (a je tedy d), jsou dvě možnosti: Buď je hlava 3d a hlava 7nd, nebo 3nd a 7d. Pokud hlava 1 lže (a je tedy nedůvěryhodná), jsou buď 3d i 7d, nebo 3nd i 7nd. Podle dalších vyjádření použitím výroků hlav 3 a 7 a pak i dalších získáme následující možnosti:

1d, 3d, 7nd → 1nd, 2d – nelze, spor u hlavy 1
→ 1d, 2nd, 5d, 6d – 7 by říkala pravdu, ale je nd - spor
→ 1d, 2nd, 5 nd, 6nd → 4d – hlava 4 by ale neříkala pravdu – spor

1d, 3nd, 7d → 1 nd, 2 nd – nelze, spor u hlavy 1
→ 1d, 2d, 5d, 6d – nelze, 5 by musela být d i nd zároveň – spor
→ 1d, 2d, 5nd, 6nd → 4 nd – ale výrok hlavy 4 by byl pravda – spor

1nd, 3d, 7d → 1d, 2nd – spor u hlavy 1
→ 1 nd, 2d, 5d, 6d → spor s tvrzením hlavy 2
→ 1 nd, 2d, 5 nd, 6nd → 4 nd, 8nd → všechna tvrzení sedí, tedy **1nd, 2d, 3d, 4nd, 5nd, 6nd, 7d, 8nd**

1nd, 3nd, 7nd → 1d, 2d → spor u hlavy 1
→ 1nd, 2nd, 5d, 6nd → 4d, 8d – hlava 8 by ale neříkala pravdu
→ 1nd, 2nd, 5nd, 6d → 4d – hlava 6 neříká pravdu

Úloha má jediné řešení, tedy že pravdu mluví hlavy 2, 3 a 7, ostatní lžou.

Úloha 6: Označme si x dráhu, po které je cesta do Černých skal po rovině, y dráhu, po které jde Honza po cestě tam do kopce, a z dráhu, po které jde z kopce. Víme, že $x + y + z = 12$ km, celkem tedy ujde $2 \cdot (x + y + z) = 24$ km.

Co je na jednu stranu do kopce, je na druhou stranu z kopce. Tedy dráhu y jde Honza do skal do kopce, ze skal z kopce, a dráhu z naopak – tam z kopce, zpátky do kopce. Je vidět, že v celkovém součtu obou cest jde Honza do kopce $(y + z)$ km a z kopce také $(y + z)$ km. Čas potřebný k ujití celé cesty tam i zpátky je tedy (s požitím ztahu mezi rychlostí, dráhou a časem):

$$t = 2 \cdot \frac{x}{24} + \frac{y+z}{20} + \frac{y+z}{30} = 2 \cdot \frac{x}{24} + \frac{3y+3z+2y+2z}{60} = \frac{x}{12} + \frac{5\cdot(y+z)}{60} = \frac{x}{12} + \frac{y+z}{12} =$$

$$= \frac{x+y+z}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Honza by tedy ušel cestu tam i zpět za jeden den.