Pikomat 21. ročník – Řešení druhé série

<u>Úloha 1:</u> Označme si vrcholy lichoběžníkové kuchyně A, B, C a D. Chceme najít bod (označme jej X), jehož vzdálenost od všech těchto bodů je stejná. Aby $|AX| = |BX|$, musí bod X ležet na ose úsečky AB (což je zároveň osa úsečky CD). Teď už máme zaručeno, že $|AX| = |BX|$ a $|CX| = |DX|$, stačí už tedy pouze zpracovat podmínku, že $|AX| = |CX|$.

Označme si E střed úsečky AB, F střed úsečky CD. Bod X tedy leží „někde“ uvnitř úsečky EF. Potřebujeme zajistit, aby $|AX| = |CX|$. $|AX|$ můžeme vypočítat z pravoúhlého trojúhelníku AEX, $|CX|$ z pravoúhlého trojúhelníku CFX. $|EX|$ označíme *kv*, potom $|FX|$=(1-*k*)*v*.

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (kv)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + [(k-1)v]^2}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (kv)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + [(k-1)v]^2$$

$$k = \frac{4v^2 + c^2 - a^2}{8v^2}$$

$$kv = \frac{4v^2 + c^2 - a^2}{8v}$$

Polohu bodu X můžeme např. vyjádřit tak, že leží uvnitř úsečky EF ve vzdálenosti $\frac{4v^2 + c^2 - a^2}{8v}$ od bodu E.

<u>Úloha 2:</u>

Při pozorném čtení textu (popř. nakreslení náčrtku) zjistíme, že dané přímky jsou rovnoběžné, tudíž se neprotínají nikde. Na otázku tedy můžeme odpovědět buď, že řešení neexistuje, nebo že hledaná vzdálenost je nekonečná.

<u>Úloha 3:</u>

Úpravami pravého výrazu se pokusíme dostat k levému:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

$$ab \cdot (c+d)^2 = (a+b)^2 \cdot cd$$

$$abc^2 + 2abcd + abd^2 = a^2cd + 2abcd + b^2cd$$

$$ad \cdot (bd - ac) = bc \cdot (bd - ac)$$

$bd \neq ac$ (víme z podmínek, proto můžeme krátit)

$ad = bc$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (opět s využitím podmínek, že *a* a *b* jsou nenulová)

<u>Jiný způsob:</u>

Z vlastností zlomků si uvědomíme, že $a = kc$, $b = kd$, kde *k* je kladné reálné číslo. Tyto vztahy pak dosadíme do pravého vztahu.

Úloha 4:

V textu není jasně zadáno, zda je bílá nahoře nebo dole, měli bychom tedy počítat s oběma možnostmi. Na obrázku je ukázáno, kolik možností rozestavení černé figurky je pro případ, že na tom poli stojí bílá (a zároveň jsou splněny podmínky úlohy). Celkem je tedy **72 možností**.

	1		2		2		1
1		2		2		1	
	2		4		4		2
2		4		4		2	
	2		4		4		2
2		4		4		2	
	1		2		2		1
1		2		2		1	

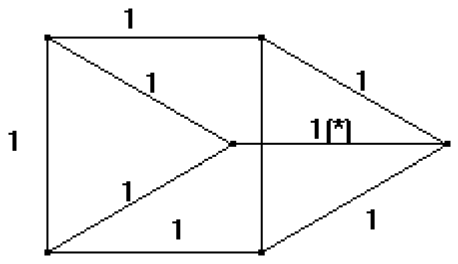
Úloha 5:

Úlohu řešíme obdobně jako úlohy předcházející, celkem existuje **50 možností**.

	0		0		0		0
0		2		2		1	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	1		2		2		0
0		0		0		0	

Úloha 6:

Např. :



(*) Tato délka je také rovna jedné, je to strana kosočtverce se stranou délky 1.