Pikomat 21. ročník – Řešení třetí série

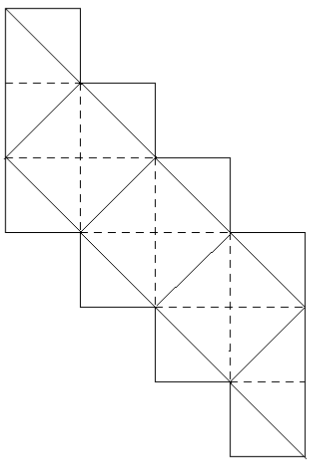
Úloha 1: Drak dá nejprve na váhu na levé i pravé rameno po třech oříšcích.
Pokud zůstanou váhy **nevychýlené**, znamená to, že v každé hromádce je právě jeden kouzelný oříšek. Drak jej najde tak, že porovná na vahách dva oříšky ze stejné hromádky. Jsou-li váhy opět nevychýlené, pak je kouzelný oříšek ten třetí, který na vahách nemá. Pokud je jeden z oříšků na vahách lehčí, je to ten kouzelný. Váží tedy jednou oříšky po třech, pak hledá kouzelný oříšek v jedné skupině, nakonec ve druhé. Celkem tedy vážil třikrát.
Pokud při prvním vážení hromádek se třemi oříšky je jedna hromádka těžší, může to znamenat dvě situace: **Oba** kouzelné oříšky jsou na lehčí hromádce nebo je **jeden** oříšek na lehčí hromádce a druhý je mimo váhy. Oříšky z těžší hromádky jsou tedy pravé, rozhodnout musí o zbylých čtyřech oříšcích. Vezme tedy dva oříšky z těch čtyř, o kterých ještě nemá rozhodnuto.

- Pokud je jeden z nich lehčí, je kouzelný, porovná tedy třetím vážením poslední dva oříšky a najde tak i druhý kouzelný oříšek.
- Pokud jsou vybrané dva oříšky stejně těžké, buď strefil dva kouzelné oříšky, nebo trefil dva pravé oříšky a dva kouzelné leží ještě na stole. Porovná tedy například hmotnost dvojic oříšků a zjistí tak, která dvojice je kouzelná.

Ať tedy první vážení vyjde jakkoli, na rozhodnutí, které oříšky jsou kouzelné, stačí **tři vážení**.

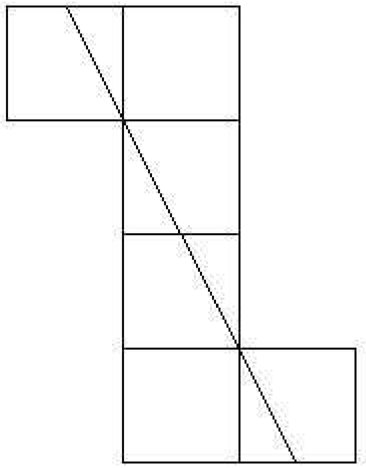
Úloha 2:
Součin $1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot 2008$ si můžeme rozdělit na 1004 dvojic a vhodně uzávorkovat:
$(1\cdot2008)\cdot(2\cdot2007)\cdot(3\cdot2006)\cdot\ \dots\ \cdot(1002\cdot1005)\cdot(1003\cdot1004)$.
Všechny dvojice v závorkách mají větší součin, než je 2008. Tedy máme součin 1004 čísel větších nebo rovných 2008. Číslo 2008^{1004} je součinem 1004 čísel rovných 2008. Proto $1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot 2008 > 2008^{1004}$.

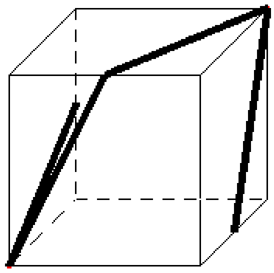
Úloha 3:
Sklady, podle kterých bychom museli útvar zpřehýbat, abychom dostali krychli, jsou na obrázku vyznačeny nepřerušovanou čarou. Každá stěna krychle se bude skládat ze dvou větších nebo čtyř menších pravoúhlých trojúhelníků, celková plocha jedné strany krychle tedy bude 2 čtverečky.



Úloha 4:

Nejdelší úsečka je nakreslena na obrázku. Její délka je $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}+\sqrt{1^2+2^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=2\sqrt{5}$. Na dalším obrázku je její zakreslení na krychli.





Úloha 5:

Přirozených čísel menších než 1000 je 999. Přirozených čísel menších než 1000, která jsou dělitelná 5, je 199. Přirozených čísel menších než 1000, která jsou dělitelná 7, je 142. Čísla, která jsou dělitelná 5 i 7 (tedy dělitelná 35), jsme započítali u pětky i u sedmičky (je jich 28). Hledaných čísel je tedy 999 – (199 + 142 – 28) = 686.

Úloha 6:

Po dosazení libovolného celého čísla končí $2x^2$ na číslici 0, 2 nebo 8, obdobně $5y^2$ končí na číslici 0 nebo 5. Žádnou kombinací těchto čísel nemůžeme dostat číslo, které by končilo na 9.