

Pikomat 22. ročník – Řešení první série

Úloha 1:

$$0 = 5 \cdot (5 - 5)$$

$$1 = 5^{5-5}$$

Např.: $2 = (5 + 5) : 5$

$$6 = 5 + \frac{5}{5}$$

$$11 = 55 : 5$$

Úloha 2:

Označme si zaměstnance, který mluví pravdu, p; zaměstnance, který lže, l. Začněme od pana A. Pokud pan A mluví pravdu (Ap), jsou dvě možnosti: Buď je Cp i Gp, nebo Cl i Gl. Pokud pan A lže (a je tedy Al), jsou buď Cp a Gl, nebo Cl a Gp. Podle výroků paní C a pana G a pak i dalších zaměstnanců získáme následující možnosti:

	Podle výroku pana A	Podle výroku paní C	Podle výroku paní B	Dopočet zbylých zaměstnanců a zkouška
Ap	→Ap, Cp, Gp	→Ap, Bp, Cp, Gp	→ Ap, Bp, Cp, Dl, El Gp	Ap, Bp, Cp, Dl, El, Fl, Gp, El
	→Ap, Cl, Gl	→Ap, Bl, Cl, Gl	→ Ap, Bl, Cl, Dp, Ep Gl	Nevychází.
			→ Ap, Bl, Cl, Dp, El, Gl	Nevychází.
Al	→Al, Cp, Gl	→Al, Bl, Cp, Gl	→ Ap, Bl, Cl, Dl, Ep, Gl	Nevychází.
			→ Al, Bl, Cp, Dp, Ep, Gl	Nevychází.
			→ Al, Bl, Cp, Dp, El, Gl	Nevychází.
	→Al, Cl, Gp	→Al, Bp, Cl, Gp	→ Al, Bp, Dl, El, Cl, Gp	Nevychází.

Úloha má jediné řešení, tedy že pravdu mluví pan Antoš, paní Bechyňová, paní Celestýnová a pan Granátový, ostatní zaměstnanci lžou.

Úloha 3:

1	4	9	3	7	6	8	5	2
8	3	2	5	9	1	4	6	7
5	6	7	4	8	2	1	9	3
4	7	5	9	2	8	6	3	1
2	9	6	1	3	5	7	4	8
3	8	1	6	4	7	5	2	9
9	1	3	7	5	4	2	8	6
6	2	4	8	1	9	3	7	5
7	5	8	2	6	3	9	1	4

Úloha 4:

a) Do obrázku šachovnice jsme umístili čísla následujícím způsobem: Necht' bílá hraje směrem „odspodu nahoru“. Představíme si, že na příslušném políčku, do kterého chceme vpisovat číslo, stojí bílá figurka. A počítáme, kolik možností vyhovujících zadání je pro postavení černé figurky.

			•		•		
				2			

	0		0		0		0
0		0		0		0	
	1		2		2		1
1		2		2		1	
	1		2		2		1
1		2		2		1	
	1		2		2		1
1		2		2		1	

Celkový počet možností je součet čísel v tabulce. Celkem je tedy 36 možností.

b) Přibudou možnosti, kdy bílá hraje „odshora dolů“, a těch je stejně, jako když hraje „odspoda nahoru“. Tedy celkem je možností $36 \cdot 2 = 72$.

Úloha 5:

Úlohu řešíme stejným postupem jako úlohu předcházející, tedy představíme si, že na políčku, do kterého chceme vepsat číslo, stojí bílá figurka. Zjistíme, kolika způsoby můžeme přidat černou figurku tak, aby splňovala dané podmínky, a toto číslo do políčka napíšeme. Výsledný počet je součet čísel ve všech políčkách.

a)

	0		0		0		0
0		0		0		0	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		0		0		0	

Celkem je 25 možností.

b)

	0		0		0		0
0		0		0		0	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		2		2		1	
	1		2		2		0
0		0		0		0	

Situace je úplně stejná jako v oddíle a). Černá je sice dáma, nemůže ale skákat z jiného políčka než bezprostředně blízkého, protože pak by bílá figurka nemohla brát ji. Celkem je 25 možností.

c) Situace je totožná s oddílem b), pouze stranově převrácená. Nezáleží na tom, která ze dvou figurek je dáma, jejich vzájemná pozice musí být stejná.

d)

	0		0		0		0
0		5		5		5	
	5		7		7		0
0		7		9		5	
	5		9		7		0
0		7		7		5	
	5		5		5		0
0		0		0		0	

Celkem je 110 možností.

e)

	0		0		0		0
0		3		3		4	
	3		3		3		0
0		3		5		3	
	3		5		3		0
0		3		3		3	
	4		3		3		0
0		0		0		0	

Celkem je 60 možností.

Úloha 6:

Abychom mohli čísla jednoduše porovnat, převedeme si je na mocniny dvojky:

$$32^9 = (2^5)^9 = 2^{45}$$

$$16^{12} = (2^4)^{12} = 2^{48}$$

$$8^{16} = (2^3)^{16} = 2^{48}$$

$$63^7 < 64^7 = (2^6)^7 = 2^{42}$$

Čísla ve správném pořadí jsou $63^7 < 32^9 < 16^{12} = 8^{16}$