Pikomat 22. ročník – Řešení druhé série

Úloha 1:
Označme si cenu sendviče s, cenu kávy k a cenu piva p. Pak platí následující rovnice:
$3s + 7k + p = 276$
$4s + 10k + p = 378$
První rovnici vynásobíme třemi, druhou dvěma a získané rovnice od sebe odečteme. Vyjde nám $s + k + p = 72$.
Mnozí z vás chybovali v tom, že se snažili najít jediné konkrétní řešení. Máme však příliš mnoho neznámých na to, abychom mohli jednoznačně určit, kolik z těch 72 Kč stojí sendvič, kolik káva a kolik pivo.

Úloha 2:
Naše číslo můžeme zapsat ve tvaru: $100(a + 1) + 10b + a$. (Protože je naše číslo trojciferné, a je nenulová číslice menší než 9.) Číslo s přehozenou první a poslední číslicí je tedy
$100a + 10b + (a + 1)$. Rozdíl těchto čísel je tedy
$A = 100(a + 1) + 10b + a – (100a + 10b + (a + 1)) = 99$ (Číslo A je tedy 99 pro jakékoli výchozí číslo splňující zadané podmínky.)
Trojciferné číslo B s číslicemi v opačném pořadí k číslu 99 (lze si představit jako 099) je číslo 990.
$A + B = 99 + 990 = 1089$

Úloha 3:
Úhel 19° nanesu devětkrát za sebou (grafické sčítání úhlů, mám tedy úhel 171°). Do 180° zbývá úhel 9°, ten dvakrát odečtu od původního úhlu.
Vy sami jste vymysleli ještě spoustu dalších řešení, např.:
Řešení podle T. Uhlířové: Sestrojíme pravidelný pětiúhelník – ne nutně celý. Středový úhel příslušející jedné jeho straně je 72°, jeho rozdělením na polovinu (osa úhlu) získáme 36°, ještě jednou na polovinu – máme 18°, tento úhel graficky odečteme od původního úhlu.
Řešení podle D. Jančaříka: Pětkrát za sebou nanesu úhel 19°, od vzniklého úhlu odečtu pravý úhel. (Mám 5°.) Nanesu čtyřikrát za sebou úhel 5°, od výsledného úhlu odečtu úhel 19°, mám 1°, který již stačí přenést k ramenu původního úhlu.
Řešení podle R. Sgallové: Vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníku je 108°. Když od něj oddělíme 90°, získáme 18°, jejich odečtením od 19°oddělíme 1°.
Řešení podle M. Pultara: Naneseme-li úhel 19° devatenáctkrát za sebou, 1° přebývá proti plnému úhlu.
Řešení podle M. Slezákové, M. Suntycha a T. Batěka: Dvojím rozdělením vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníka na poloviny získáme úhel 15°, ten odečteme od 19° a výsledný úhel o velikosti 4° opět rozdělíme dvakrát na polovinu. Máme 1°, ten odečteme od původního úhlu.

Úloha 4:
Jakékoliv číslo, které není dělitelné pěti, si můžeme rozepsat jako součet čísla dělitelného pěti (k) a zbytku (z) – zbytek může nabývat hodnot 1, 2, 3 nebo 4. Čtvrtou mocninu libovolného čísla tedy můžeme rozepsat takto:
$$(k + z)^4 = k^4 + 4k^3z + 6k^2z^2 + 4kz^3 + z^4.$$
Všechny členy součtu s výjimkou z^4 jsou zcela jistě dělitelné pěti, protože k je dělitelné pěti. Zbývá prozkoumat z^4. Protože z je 1, 2, 3 nebo 4, musí být z^4 1, 16, 81 nebo 256. Všechna tato čísla dávají po vydělení pěti zbytek 1.

Tím jsme dokázali, že čtvrtá mocnina jakéhokoli čísla, které není dělitelné pěti, dává po vydělení pěti zbytek 1. Sečteme-li tedy *jednu* čtvrtou mocninu čísla x a *čtyři* čtvrté mocniny čísla y, zbytky dají dohromady *celou pětku*, výsledné číslo tedy bude dělitelné pěti.

Úloha 5:
Zakreslením prvního bodu do padesátiúhelníku vznikne 50 trojúhelníků. Při přidání každého dalšího bodu počet trojúhelníků o 2 vzroste. K původním 50ti trojúhelníkům tedy přibude $19 \cdot 2 = 38$ trojúhelníků, celkem jich bude 88.

Úloha 6: