Pikomat 22. ročník – Řešení třetí série

Úloha 1:

Nejprve si uvědomme důležitou věc. Vytrhnul-li vandal z knihy list, znamená to, že vytrhnul dvě stránky následující za sebou. (List je potištěn z obou stran.)
Označme si počet stránek knihy *n*. Situaci si podstatně zjednodušíme, sestavíme-li si obecný vzorec pro součet čísel stran knihy o *n* stránkách.
Čísla stránek v knize jsou v pořadí 1, 2, 3, …, *n*. Sečteme-li první a poslední číslo, druhé a předposlední, …, vždy dostaneme stejný součet. (Pokud to nevidíte obecně, zkuste si tímto způsobem sečíst např. čísla od 1 do 10.) Pokud tento součet vydělíme dvěma, dostaneme průměrnou hodnotu na jedno číslo. Celkový součet čísel stran v knize o *n* stránkách je tedy $\frac{1+n}{2}\cdot n$.
Nyní si vytvoříme odhad, jak asi velká čísla bychom měli zkoumat. Zkusíme najít počet stránek, který by odpovídal součtu 10 000, kdyby žádná stránka nebyla vytržena.

$\frac{1+n}{2}\cdot n = 10\,000.$

$n^2 + n - 20\,000 = 0.$

Řešením této kvadratické rovnice dojdeme k řešení, že máme zkoumat počty stránek větší než 140. (Kdo ještě neumíte řešit kvadratické rovnice, můžete začít tím, že počet stránek odhadnete a výpočty odhad postupně zpřesňujete.)
Pokud by stránek v knize bylo 141, celkový součet čísel by byl $\frac{1+141}{2}\cdot 141 = 10011$.
Vytrženy jsou tedy dvě stránky, jejichž součet je 11, tedy stránky 5 a 6.
Pokud by stránek v knize bylo 142, celkový součet čísel by byl $\frac{1+142}{2}\cdot 142 = 10153$.
Vytrženy jsou tedy dvě stránky, jejichž součet je 153, tedy stránky 76 a 77.
Pokud by stránek v knize bylo 143, celkový součet čísel by byl $\frac{1+143}{2}\cdot 143 = 10296$. Součet čísel na vytržených stránkách by musel být 296, což není možné, protože součet dvou za sebou následujících přirozených čísel je vždy lichý. Navíc vytržené stránky by již měly vyšší čísla, než je celkový počet stránek knihy. Vyšší čísla již tedy nemá cenu zkoušet.
Z výpočtu nám vyplynuly dvě možnosti. Buď má kniha 141 stránek a vytržen je list se stránkami 5 a 6, nebo má 142 stránek a vytržen je list se stránkami 76 a 77. Podíváme-li se však do reálné knížky, zjistíme, že list vždy začíná lichým číslem a pokračuje sudým číslem. Proto je správná pouze první možnost – kniha má 141 stránek a vytržen je list se stránkami 5 a 6.
Za poslední úvahu – tedy vyloučení varianty, kdy by list začínal sudým číslem (což opravdu v žádné knížce nenajdete), uděloval Pikomat prémiový bod navíc.

Úloha 2:

Dosadíme-li *x* = 20, získáme součin $38\cdot 36\cdot 34\cdot \ldots \cdot(-60)$. Jedním z činitelů (odpovídající závorce (2*x* – 20)) bude ale nula, proto má celý součin hodnotu 0.

Úloha 3:

Umocníme-li na čtvrtou přirozené číslo, které je dělitelné pěti, získáme opět číslo dělitelné pěti. Umocníme-li na čtvrtou přirozené číslo, které dělitelné pěti není, získáme vždy číslo dávající po dělení pěti zbytek 1. (Důkaz je snadný – rozepište si čtvrté mocniny čísel nedělitelných pěti se všemi možnými zbytky, tedy $(5k + 1)^4$, $(5k + 2)^4$, $(5k + 3)^4$, $(5k + 4)^4$, vždy se dostanete k číslu dávajícímu po vydělení pěti zbytek 1.)

Čísla na pravé a levé straně rovnice $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ jsou stejná, musejí proto dávat i stejné zbytky po dělení pěti.

- Dává-li e^4 po vydělení pěti zbytek 0, pak není jiná možnost, než aby každé z čísel a^4, b^4, c^4, a d^4 dávalo po vydělení pěti zbytek 0. Pak jsou tedy všechna čísla a, b, c, d, e dělitelná pěti, tedy podmínka úlohy je splněna.
- Dává-li e^4 po vydělení pěti zbytek 1, pak není jiná možnost, než aby právě jedno z čísel a^4, b^4, c^4, a d^4 dávalo po vydělení pěti zbytek 1 a ostatní tři zbytek 0. I pro tuto možnost je tedy podmínka úlohy splněna.

<u>Úloha 4:</u>

Postupným zpracováváním informací ze zadání dostaneme výrazy:

$$x,\ \frac{1}{x},\ 1-\frac{1}{x},\ \frac{1}{1-\frac{1}{x}},\ 1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}},\ \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}},\ 1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$$

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=1-\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}=1-\frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}}=1-\frac{1}{\frac{-1}{x-1}}=1+x-1=x$$

Dostaneme číslo x.

<u>Úloha 5:</u>

Dívky získaly pokaždé vzájemně různý počet bodů, celkem se muselo v hodnocení vyskytnout třikrát x, třikrát y a třikrát z. Dívky celkem získaly 20 + 10 + 9 = 39 bodů.

$3x + 3y + 3z = 39$

$x + y + z = 13.$

Žádná z dívek nezískala $x + y + z$ bodů, protože to by měla 13 bodů. Anna a Betty získaly počet bodů, který není dělitelný třemi, proto nezbývá jiná možnost, než aby získaly dvakrát stejný a jednou jiný výsledek. Cecílie mohla získat buď třikrát stejný výsledek, nebo dva stejné a jeden jiný.

Shrnutím těchto informací vychází dvě možnosti:

Anna	$2x + y = 20$	$2x + y = 20$	$2x + y = 20$	$2x + y = 20$
Betty	$2y + z = 10$	$2y + x = 10$	$2z + x = 10$	$2z + y = 10$
Cecílie	$2z + x = 9$	$3z = 9$	$2y + z = 9$	$x + y + z = 9$
	Nevyjdou celočíselná řešení.	$x = 10,\quad y = 0,\quad z = 3$	$x = 8$, $y = 4$, $z = 1$	Nelze.

Vycházejí dvě možná uspořádání:

Anna získala dvakrát 10 a jednou 0 bodů, Betty dvakrát 0 a jednou 10 bodů a Cecílie třikrát 3 body. Ve všem, tedy i v geometrii, byla druhá Cecílie.

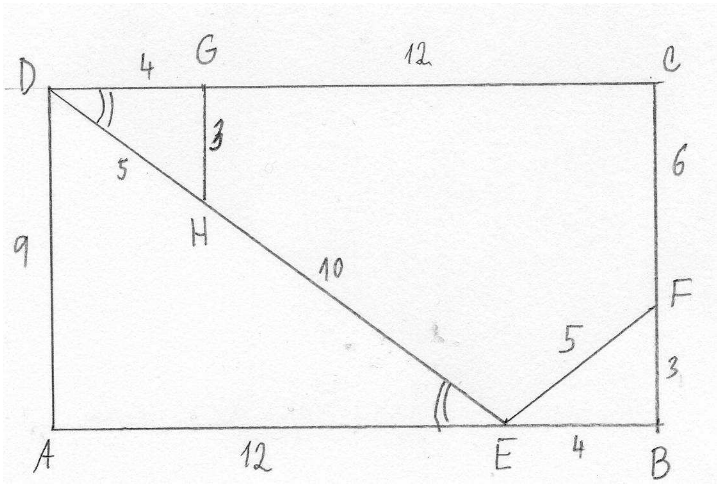
Nebo:

Anna získala dvakrát 8 bodů a jednou čtyři body, Betty dvakrát 1 bod a jednou 4 body a Cecílie dvakrát 4 body a jednou 1 bod. Použijeme-li další podmínky úlohy, připadá v úvahu pouze jediné řešení, a to pořadí: Algebra: BAC, obě další oblasti: ACB. Opět tedy v geometrii byla druhá Cecílie.

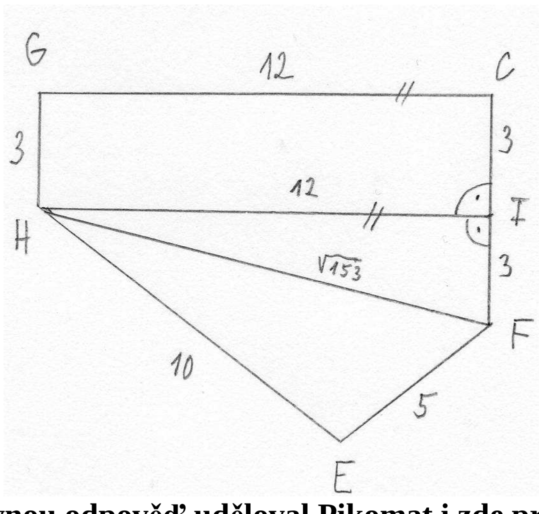
<u>Pokud někdo z vás přišel na obě řešení nebo vytvořil jiné – zcela obecné řešení, dostal od Pikomatu prémiový bod.</u>

<u>Úloha 6:</u>

Trojúhelník ADE je pravoúhlý, proto podle Pythagorovy věty $|AE|^2 = |DE|^2 – |AE|^2$, tedy $|AE| = 12$. (Těch 12 znamená 12 jednotek, které beru jako základ, protože autor neuvádí, zda to byly centimetry, metry nebo třeba délky jeho palce.)
Úhly HDG a DEA jsou střídavé, proto mají stejnou velikost. Úhly DGH a EAD jsou oba pravé. Trojúhelníky DGH a EAD jsou proto podobné podle věty *uu*. Z poměrů podobnosti vypočítáme, že $|DG| = 4$ a $|GH| = 3$.
Máme $|DC| = 12 + 4 =16$, tedy $|BE| = 16 – 4 = 8$.
$|CF| = 9 – 3 = 6$.



Vypadá to, že strana čtverce, pokud bychom dokázali, že se z daných dílů dá složit čtverec, měl by stranu dlouhou $\sqrt{9 \cdot 16} = 12$.
Podívejme se ale na pětiúhelník GHEFC. Přidáme si do něj úsečku HI (doplnění na obdélník GHIC). Trojúhelník HIF je pravoúhlý, z Pythagorovy věty vypočteme délku $|HF| = \sqrt{153}$. Pokud by ale byl trojúhelník HEF byl pravoúhlý, tak jak stojí v zadání, musela by podle Pythagorovy věty být $|HF| = \sqrt{125}$. Objekt zadaný v úloze tedy neexistuje a zadání není možné splnit.



<u>Za zdůvodněnou a správnou odpověď uděloval Pikomat i zde prémiový bod.</u>