23. ročník - řešení 1. série

Úloha 1

1)

a) např.:

$11 - 1 - 1 \cdot 1$
$2 \cdot 2 \cdot 2 + 2:2$
$3 \cdot 3 + (3 - 3) \cdot 3$
$4 + 4 + (4:4)^4$
$5 + 5 - (5:5)^5$

b) např.:

$11 - 1 - 1$
$22:2 - 2$
$3 \cdot 3 + 3 - 3$
$4 + 4 + 4:4$
$5 + 5 - 5:5$

c) Lze pouze

$3 + 3 + 3$

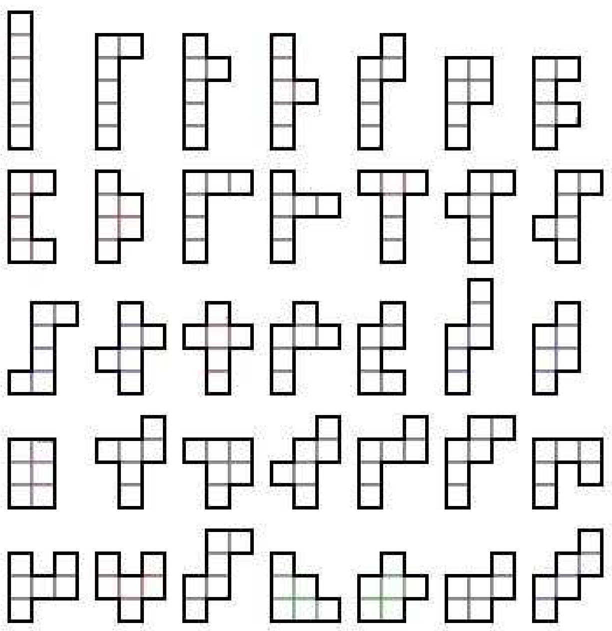
1 1 1 – nelze, protože 111 a 11 – 1 jsou příliš velké, odmocňováním nedocílíme celého čísla, faktoriálem a podobnými operacemi hodnotu jen zvyšujeme a ze tří jedniček lze naopak sestavit max. číslo 3

2 2 2 a 4 4 4 nelze, protože docílíme pouze sudých čísel. Pokud bychom vytvořili liché číslo např. způsobem 2:2, násobit nesmíme – bylo by opět sudé, jinak už nám zbývá příliš málo čísel na dosažení požadované hodnoty.

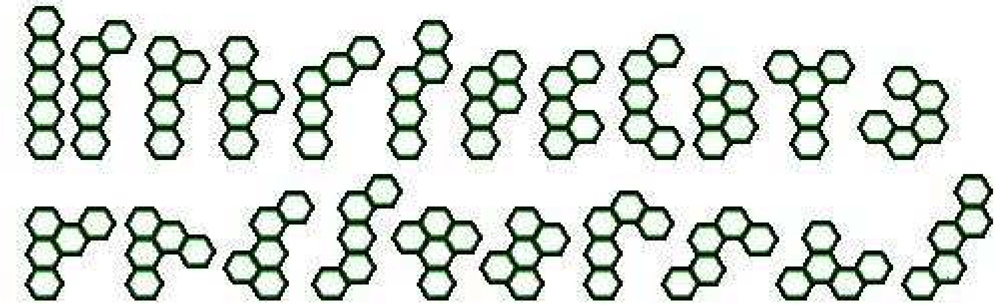
5 5 5 – 55:5 je moc, násobením či umocňováním získáme příliš vysokou hodnotu, blízkou hodnotu 5 + 5 nesnížíme o 1 pomocí jedné pětky.

Úloha 2

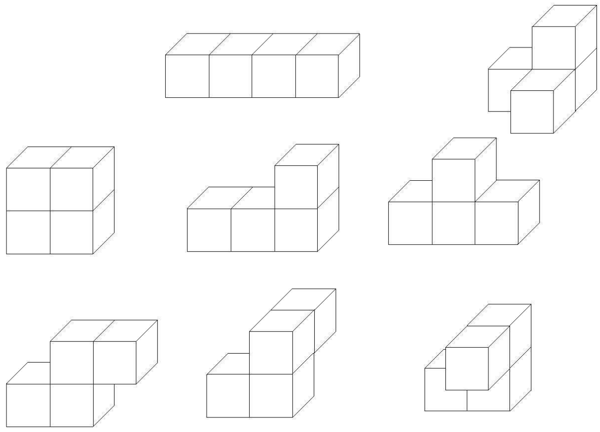
a) 35



b) 22



c) 8



Úloha 3

Pracujme jen s trojúhelníkem obsahujícím vybarvenou část. Označme poloměr kružnice *r*. Strana šestiúhelníku má velikost 2 *r*. Obsah trojúhelníku je $\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}$. Od tohoto obsahu musíme odečíst dvakrát obsah kruhové výseče s poloměrem *r* vymezenou úhlem 60° - tedy dvěma šestinami (neboli jednou třetinou) obsahu kruhu s poloměrem *r*. Proto $S = \left[\cdot r^2\sqrt{3} - \cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\right] = \frac{r^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$.

Úloha 4

Máme najít čísla, která se skládají z jiných čísel než jedniček a jsou menší než 50 000. Číslo 50 000 počítáme zvlášť. Ostatní na místě desetitisíců mohou mít 0, 2, 3 nebo 4 (celkem 4 možnosti), na místě tisíců 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (celkem 9 možností). U stovek, desítek a jednotek je situace stejná jako u tisíců. Takto jsme tedy vytvořili 4·9·9·9·9 = 26244 možností. Přitom jsme však jedno číslo (50 000) nezapočítali, započítali jsme však navíc číslo 00 000 (neboli nula), které je menší než 1.
Celkem existuje 26244 + 1 – 1 = 26244 čísel s hledanou vlastností.

Úloha 5

Označme poloměr malých kruhů a, poloměr velké kružnice r. Do obrázku zakreslíme 9 shodných rovnostranných trojúhelníků o straně $2a$. Tlustě vytažen je rovnostranný trojúhelník o straně $3\cdot 2a = 6a$. Střed prostředního kruhu je v jeho těžišti. Hledaný poloměr velké kružnice je tedy roven 2/3 výšky tohoto rovnostranného trojúhelníku, tedy $\frac{2}{3}\cdot(6a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\cdot a$.

Poměr, na který jsme se ptali, je tedy roven $(2\sqrt{3}\cdot a) : a = 2\sqrt{3} : 1$.

(Pozn. – Nezaměňujte pojmy kruh a kružnice. Kruh se skládá z kružnice a z plochy touto kružnicí omezenou.)