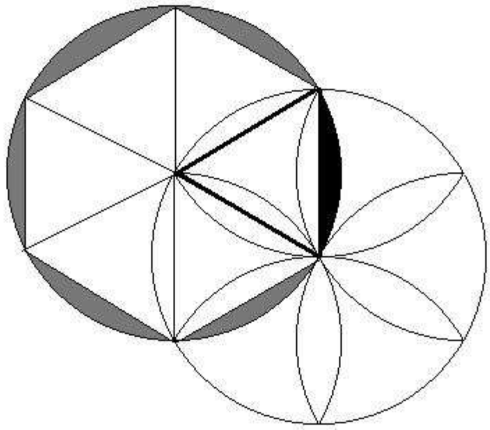
23. ročník - řešení 2. série

1) Dokresleme si jednu celou kružnici, jejíž oblouky ohraničují kytičku.



Zkoumejme nyní plochu poloviny lístku kytičky. Z obrázku je vidět, že plocha šesti těchto polovin je rovna rozdílu obsahu kruhu o poloměru stejném, jako je poloměr výchozího kruhu, a obsahu šestiúhelníku tomuto kruhu vepsanému. Označíme-li si poloměr výchozí kružnice r, obsah šesti půlek lístečku – tedy obsah tří lístečků – spočítáme následovně:

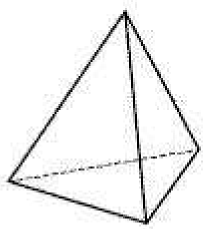
$$\pi r^2 - 6 \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 = r^2 \cdot (\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2})$$

Obsah celé kytičky je obsah 6 lístečků, tedy dvojnásobek:

$$S = 2 \cdot r^2 \cdot (\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}) = r^2 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})$$

Poměr obsahu kytičky ku obsahu kruhu je tedy $\frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) \cdot \cancel{r^2}}{\pi r^2} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})}{\pi} = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

2) Takové očíslování čtyřstěnu neexistuje.



Pravidelný čtyřstěn má čtyři stěny a čtyři vrcholy. Označíme-li čísla ve vrcholech čtyřstěnu a, b, c, d a čísla na stěnách e, f, g, h, pak $e = \frac{a+b+c}{3}$ atd. Sečteme-li čísla na stěnách, vyjde $e + f + g + h = \frac{3a + 3b + 3c + 3d}{3}$, tedy $e + f + g + h = a + b + c + d$.

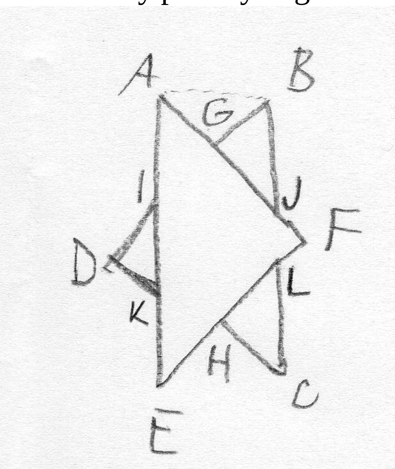
Tedy na vrcholy musí přijít taková čísla, aby jejich součet byl roven polovině součtu čísel od 1 do 8. Jelikož je 1 + 2 + 3 + ... + 8 = 36, čísla ve vrcholech musí tedy mít součet 18 (a stejně tak i čísla na stěnách).

Hledejme např. čísla, která umístíme do vrcholů. Tedy máme najít taková čtyři čísla od 1 do 8, která jsou navzájem různá a jejichž součet je 18. (Zjevně mezi nimi musí být sudý počet lichých čísel, to nám usnadní hledání.) Kdyby očíslování existovalo, ve vrcholech by musela být některá z následujících čtveřic čísel:

1 3 6 8, 1 5 4 8, 1 7 2 8, 3 5 2 8, 3 7 2 6, 5 7 2 4, 1 7 4 6, 3 5 4 6

Všechny tyto čtveřice čísel sice vyhovují podmínce součtu, ale u žádné z nich není splněna podmínka, že by aritmetické průměry všech čtyř trojic čísel utvořených z čísel čtveřice byla zbylá celá čísla do osmi. Tím jsme dokázali, že úloha řešení nemá.

3) Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník je vlastně polovina čtverce. V řešení budeme často využívat vztah, že délka úhlopříčky ve čtverci o délce strany a (neboli délka základny rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s ramenem délky a) je $a \cdot \sqrt{2}$. Tento vztah je lehce odvoditelný přes Pythagorovu větu.



Vzhledem k podobným zadáním úloh a) a b) pro nás bude výhodnější počítat nejprve obecně. Označme si $|AB| = a$. Obsah průniku spočítáme jako rozdíl obsahů $S_{BCD} - (S_{HLC} + S_{BGJ} + S_{DIK})$, přičemž zjevně $S_{HCL} = S_{BGJ}$. Trojúhelníky HCL a HCE jsou shodné (např. podle věty *sus* – oba rovnoramenné pravoúhlé) – proti je

$$|LC| = a \qquad \text{a} \qquad |HL| = |HC| = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

odkud $S_{HCL} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. (Protože je to pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.)

Je také $|JL| = |IK| = |BC| - |LC| - |BJ| = 4 \cdot \sqrt{2} - a - a = 4\sqrt{2} - 2a$.

Trojúhelník DIK je také pravoúhlý rovnoramenný (s přeponou IK), proto

$$|ID| = \frac{4\sqrt{2} - 2a}{\sqrt{2}} = 4 - a\sqrt{2} \text{ a pak}$$

$$S_{DIK} = \frac{1}{2} \cdot (4 - a\sqrt{2})^2 = \frac{16 - 8a\sqrt{2} + 2a^2}{2} = 8 - 4a\sqrt{2} + a^2.$$

Celkově tedy

$$S = \frac{4 \cdot 4}{2} - 2 \cdot \frac{a^2}{4} - (8 - 4a\sqrt{2} + a^2) = 8 - \frac{a^2}{2} - 8 + 4a\sqrt{2} - a^2 = 4a\sqrt{2} - \frac{3a^2}{2},$$

$$o = 4 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot (4\sqrt{2} - 2a) = 2a\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 4a = 2a(\sqrt{2} - 2) + 8\sqrt{2}.$$

Nyní již jen dosadíme konkrétní hodnoty:

a) $a = 1$ cm

$$S = \left(4\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) \text{cm}^2$$

$$o = \left(2\sqrt{2} - 4 + 8\sqrt{2}\right) \text{cm} = \left(10\sqrt{2} - 4\right) \text{cm}$$

b) $a = \sqrt{6^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2}$ cm $= 2$ cm

$$S = \left(4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - \frac{3 \cdot 2^2}{2}\right) \text{cm}^2 = \left(8\sqrt{2} - 6\right) \text{cm}^2$$

$$o = \left[4 \cdot (\sqrt{2} - 2) + 8\sqrt{2}\right] \text{cm} = \left(12\sqrt{2} - 8\right) \text{cm}$$

4) Protože je stůl trojúhelníkový, nejsou místa u něj rovnocenná. Když si zvolíme jedno místo jako první, můžeme na něj vybrat ze sedmi osob, na druhé ze šesti, ..., až člověk na posledním místě je již jednoznačně určen. Počet řešení, která nejsou přímo shodná, je tedy $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$. Musíme však vyřadit nepřímo shodná řešení (což jsou taková řešení, která vzniknou překlopením obrázku (živé lidi raději překlápět nebudeme :-) – tedy která jsou symetrická podle osy základny trojúhelníku). Je zjevné, že ke každému řešení existuje jedno s ním nepřímo shodné. Řešení vyhovujících podmínkám úlohy je tedy 5 040 : 2 = 2 520.

5) Ne, protipříkladem je např. $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.